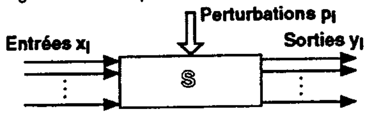
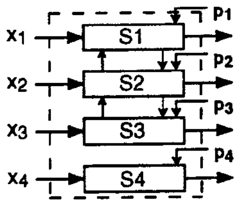
GENERALITES

Comme on l'a déjà mentionné auparavant, un **système**, ou **processus** (on parle aussi de **procédé**, bien que cette dénomination soit plutôt liée à la notion de méthode [de fabrication, etc.]), répond à des signaux d'entrée en produisant d'autres signaux. Certains systèmes peuvent de plus être soumis à des signaux d'entrée particuliers, considérés comme des **perturbations** :

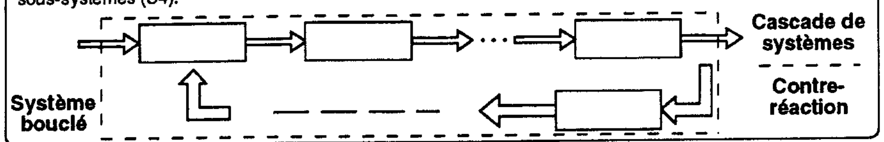


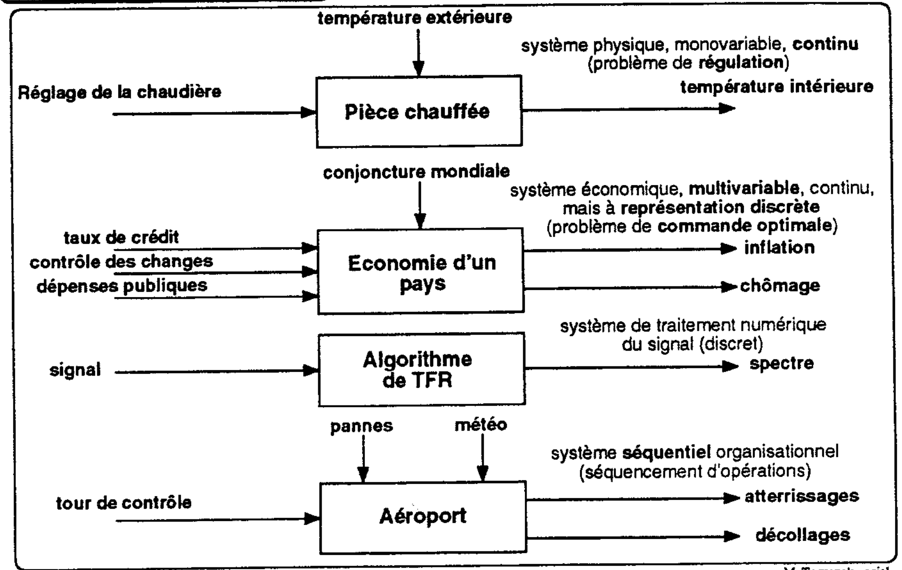
Une telle définition est suffisamment générale pour s'appliquer à des domaines aussi divers que l'économie, la biologie, la géophysique ou l'électronique, aucune précision n'étant donnée sur la nature des signaux et des phénomènes impliqués.

De plus, tout système peut être en fait constitué de plusieurs systèmes, appelés **sous-systèmes**, ces derniers pouvant être par exemple de nature différente. Une autre possibilité consiste à isoler les sous-systèmes **monovariables**, mais ceci suppose l'absence de **couplages** internes, i.e d'interactions avec d'autres sous-systèmes (S4).

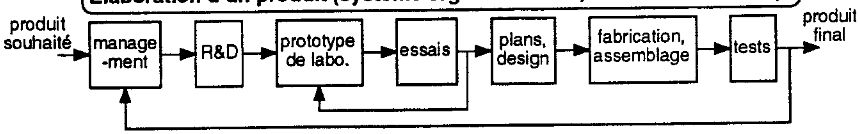


Plusieurs systèmes peuvent bien sûr être assemblés de manière à constituer un seul système plus complexe, par exemple par **mise en série ou en cascade**. Enfin, les systèmes qui comportent une **contre-réaction** ou **rétroaction** sont dits **"en boucle fermée"**, ou plus simplement **systèmes bouclés**.



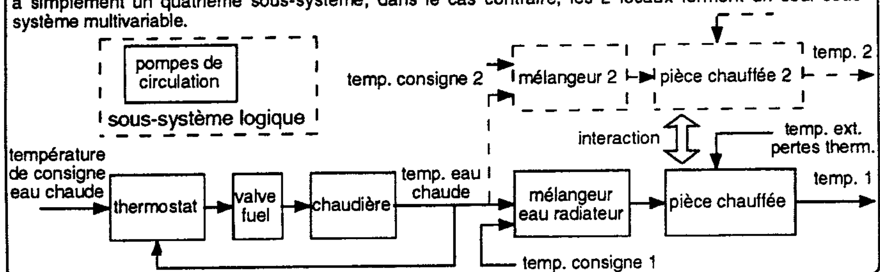


Elaboration d'un produit (système organisationnel, d'ordonnancement)



Régulation de température dans une pièce

Ce système multivariable, destiné à assurer une température donnée dans une pièce, est constitué de 3 sous-systèmes : le **système logique** de commande de circulation hydraulique, le **système analogique** de régulation de température de l'eau chaude (régulation **TOR**), qui est bouclé, et la pièce munie d'un radiateur. Cas d'une seconde pièce à chauffer : si l'isolation thermique entre les 2 pièces est bonne, on a simplement un quatrième sous-système, dans le cas contraire, les 2 locaux forment un seul sous-système multivariable.



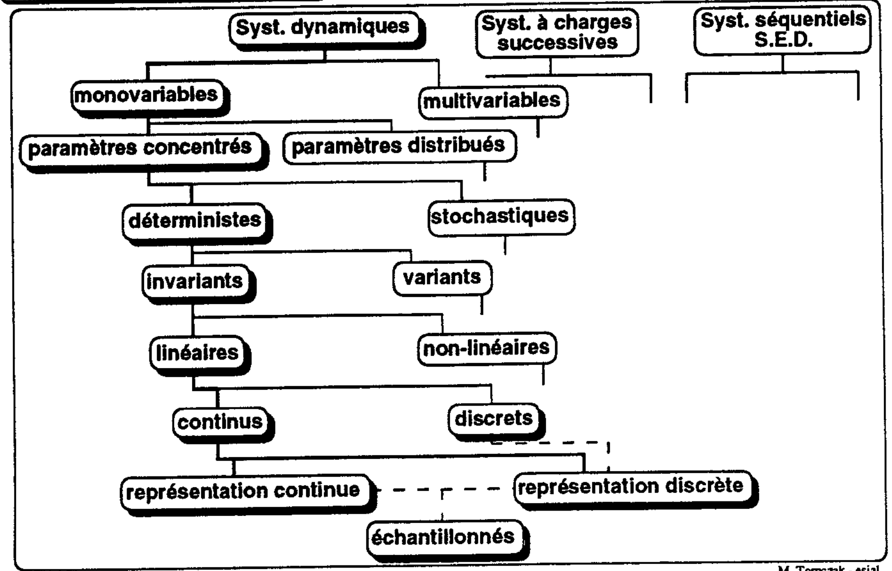
La nature des systèmes considérés est bien sûr en relation avec la nature des signaux impliqués (analogiques, discrets, logiques, etc.), mais également avec le type de **représentation entrées/sorties** correspondant, c'est à dire le modèle mathématique choisi pour décrire son fonctionnement :

Relation algébrique ↔	**Systèmes statiques** ↔	**Signaux continus, discrets, ...**
Equations différentielles, aux différences ⇕ **Fonction de transfert ou transmittance (repr. externe), représentation d'état (repr. interne)** ↔	**Systèmes dynamiques** ↔	**Signaux analogiques, échantillonnés, numériques**
Relation algorithmique ↔	**Systèmes numériques** ↔	**Signaux numériques**
Relation descriptive de type "si..., alors" ↔	**Systèmes séquentiels** ↔	**Signaux logiques**

etc.

Dans le cadre de ce cours, nous sommes intéressés au premier chef par les systèmes d'origine technologique, essentiellement à vocation industrielle, et plus précisément par les systèmes de **commande** et de **régulation**, numériques et analogiques, ainsi que les systèmes de **traitement analogique et numérique de signaux**. Dans ce contexte, les systèmes réels sont le plus souvent **hybrides**, i.e constitués de sous-systèmes de types différents (dynamique et séquentiel, numérique et analogique, etc.).

SYSTEMES (Introd.) CLASSIFICATION



SYSTEMES (Introd.) DEFINITIONS

Systèmes dynamiques : ils sont caractérisés par des phénomènes à évolution continue dans le temps, mais la définition s'étend aux systèmes discrets analogues. Ils sont généralement décrits à partir d'équations différentielles (ou aux différences), d'**équations d'état** ou de **fonctions de transfert** (continues, discrètes ou échantillonnées). Exemples : production et consommation d'énergie, transformation d'énergie ou de matière, phénomènes de mouvement, algorithme de commande ou de filtrage optimal, etc.

Systèmes à Evénements Discrets, séquentiels : les processus séquentiels sont caractérisés par une suite d'événements singuliers se succédant dans le temps, ils se déroulent en principe dans les systèmes logiques et sont décrits à l'aide de l'algèbre de Boole et de représentations du type **réseau de Pétri** ou **Grafcet**. Exemples : phases de démarrage et d'arrêt, usinage de pièces, cycles de robots, etc.

Systèmes "batch" ou par charges successives : cas particulier de systèmes pouvant être considérés des 2 points de vue. Exemple : un réacteur mélangeur fonctionne par cycles successifs, mais à l'intérieur d'un cycle, la variation de niveau pendant le remplissage et la vidange ou de la concentration pendant le mélange est un phénomène à évolution continue.

Systèmes monovariables (Single Input-Single Output) : systèmes à une seule entrée et une seule sortie (une seule équation différentielle).

Systèmes multivariables (Multiple Input-Multiple Output) : systèmes à plusieurs entrées et sorties (système d'équations différentielles).

Systèmes à paramètres concentrés : systèmes décrits par des équations différentielles (ou aux différences) ordinaires.

Systèmes à paramètres distribués : systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles. Exemple : évolution de la température d'un fluide au sein d'un échangeur au cours du temps et en fonction de la distance parcourue dans l'échangeur.

SYSTEMES (Introd.) DEFINITIONS

Systèmes déterministes : systèmes répondant de façon déterministe à des signaux déterministes.

Systèmes stochastiques : systèmes intrinsèquement aléatoires (coefficients des équations différentielles évoluant de façon aléatoire) ou systèmes déterministes soumis à des signaux aléatoires (prise en compte du bruit, de **perturbations aléatoires**).

Systèmes invariants : systèmes à paramètres constants, dont le fonctionnement est donc inchangé au cours du temps (équation différentielle à coefficients constants). La réponse d'un système invariant à une excitation donnée est la même quelque soit l'instant auquel cette excitation est appliquée :

$$\boxed{y(t) = S[x(t)] \Rightarrow y(t-\tau) = S[x(t-\tau)]}$$

Systèmes variants : systèmes à paramètres évolutifs, dont le fonctionnement change au cours du temps. Exemples : phénomènes d'usure ou de vieillissement d'une installation, fusée qui au cours de son ascension perd un étage et/ou consomme du comburant.

Systèmes linéaires : systèmes possédant les propriétés d'additivité et de proportionnalité et, donc, obéissant au **principe de superposition** (équations différentielles linéaires) :

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= S[x_1(t)] \\ y_2(t) &= S[x_2(t)] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) + y_2(t) = S[x_1(t) + x_2(t)] & \text{additivité} \\ a y_1(t) = S[a x_1(t)] & \text{proportionnalité} \end{cases}$$

$$y(t) = \sum_k a_k y_k(t) = S[x(t) = \sum_k a_k x_k(t)] \quad \text{superposition}$$

SYSTEMES (Introd.) DEFINITIONS

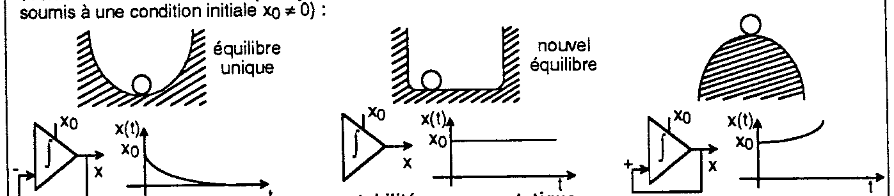
Systèmes non-linéaires : systèmes ne vérifiant pas l'une des propriétés précédentes. Dans ce cadre, on distingue les systèmes non-linéaires par essence des systèmes linéarisables.

Systèmes discrets : systèmes soumis à des signaux discrets. Ils sont décrits par des équations aux différences ou d'état discrètes, ou par une **fonction de transfert discrète** (T. en z).

Systèmes continus : systèmes soumis à des signaux continus. Ils sont décrits par des équations différentielles ou d'état, ou des fonctions de transfert (T. Laplace). On peut avoir besoin d'une représentation discrète d'un système continu (système échantillonné) lorsqu'il fonctionne de pair avec un système discret. Dans ce cas, on utilise des équations d'état ou aux différences correspondant à une discrétisation de leur équivalent continu, ou une **fonction de transfert échantillonnée** (T. en z).

Systèmes causals : un système causal est un système non anticipatif, c'est à dire dont les sorties ne dépendent pas d'entrées futures. C'est le cas des systèmes physiques. Contre-exemple : algorithme de moyennage d'un signal sur une fenêtre mobile.

Système (asymptotiquement) stable : système pour lequel à toute entrée bornée correspond une sortie bornée (BIBO). De façon équivalente, on dit qu'un système est dans un état d'équilibre stable, si écarté de cet état (c'est à dire s'il est soumis à une entrée de durée finie), il tend à y revenir, éventuellement en oscillant (un système instable s'en écarte davantage). Illustration (systèmes libres soumis à une condition initiale $x_0 \neq 0$) :



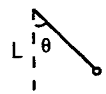
stabilité asymptotique — **stabilité non asymptotique (limite de stabilité)** — **instabilité**

SYSTEMES (Introd.) DEFINITIONS

Systèmes linéarisables : les systèmes physiques ne sont en général pas linéaires, puisque les caractéristiques de leurs **différents organes** ne le sont pas : les **amplificateurs** (transistors, vérins, ...) **se saturent**, les pièces mécaniques mobiles (engrenages, pistons, vannes, ...) se déplacent avec des **jeux et des frottements**, se déforment en transmettant les forces, les circuits magnétiques (moteurs, électroaimants,...) sont l'objet d'**hystérésis**, etc. Mais il faut distinguer les systèmes linéarisables, qui peuvent être étudiés à l'aide de modèles linéaires dans un **domaine de fonctionnement défini**, des systèmes intrinsèquement NL, pour lesquels des méthodes particulières doivent être développées.

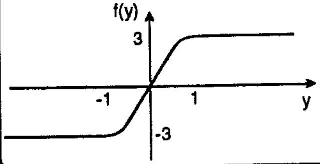
Exemples :

Mouvement au voisinage d'un point d'équilibre : on considère un pendule simple de longueur L, mais on se limite à de petits déplacements autour de la position d'équilibre $\theta = 0$:



$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \xrightarrow{\theta \# 0} \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

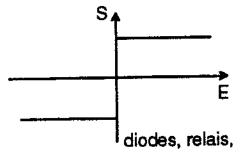
Système linéarisable par parties :



$$\dddot{y} + 3\ddot{y} = f(y)$$

$$\rightarrow \dddot{y} + 3\ddot{y} = \begin{cases} -3 & y < -1 \\ 3y & |y| < 1 \\ 3 & y > 1 \end{cases}$$

Système NL par essence : caractéristique E/S du type



diodes, relais,...

SYSTEMES (Introd.) CONCLUSIONS

Dans la suite, on s'intéresse essentiellement aux **Systèmes** dynamiques **Invariants Linéaires (SIL,** en anglais **LTI)** monovariables déterministes, pour la plupart causals, ou à des systèmes invariants **linéarisés autour d'un point de fonctionnement** qui peuvent donc être assimilés à des SIL. Il faut toutefois garder à l'esprit que les systèmes réels comportent en général des parties séquentielles, ne serait-ce que pour assurer les opérations de démarrage et d'arrêt du processus. D'autre part, les installations industrielles de grande taille sont en général organisées en **structure hiérarchisée** où différentes fonctions sont réalisées à chaque niveau : niveau de commande analogique, numérique ou séquentielle, niveau de **supervision**, **coordination**, niveau de **gestion de production**, etc. Les systèmes qui nous intéressent sont aux niveaux les plus bas de cette hiérarchie.

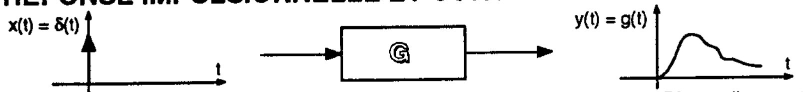
Les propriétés d'invariance et de linéarité présentées auparavant suffisent à préciser l'expression de la réponse, à un signal quelconque, d'un SIL, quelque soit sa structure, en fonction soit de sa **réponse impulsionnelle**, soit de sa **réponse fréquentielle** ou **harmonique**.

Bien sûr, dans la réalité, les systèmes ne sont en général ni déterministes (bruit), ni invariants (vieillissement) et rarement linéaires. Mais, d'une part ces hypothèses simplificatrices peuvent être approximativement vérifiées (RSB élevé, vieillissement à long terme, linéarisation, ...), d'autre part, elles permettent de bâtir une théorie cohérente, d'un usage commode.

On verra que le cas des systèmes échantillonnés est un peu particulier, car bien que traités comme tels, ces systèmes ne sont en fait ni linéaires ni invariants.

SYSTEMES 1. S.I.L. CONTINUS

REPONSE IMPULSIONNELLE ET CONVOLUTION :



La **réponse impulsionnelle, c'est à dire la réponse à une impulsion de Dirac**, d'un système invariant linéaire continu G initialement au repos, notée g(t), **caractérise entièrement celui-ci**. En effet, tout signal continu x(t) peut être décomposé en une "somme" pondérée d'impulsions décalées selon :

$$x(t) = x(t)*\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Du fait de l'**invariance** du système, sa réponse à chaque impulsion décalée $\delta(t-\tau)$ est :

$$G[\delta(t-\tau)] = g(t-\tau)$$

Compte tenu de sa **linéarité**, sa réponse à un signal quelconque x(t) est donnée par une "somme" pondérée de réponses impulsionnelles décalées :

$$y(t) = G[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau = x(t)*g(t)$$

Si le système est **causal**, sa réponse impulsionnelle g(t) est un signal causal, et le terme $g(t-\tau)$ s'annule pour $\tau > t$. De plus, si x(t) est causal, l'expression précédente s'écrit :

$$y(t) = G[x(t)] = \int_{0}^{t} x(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

La réponse impulsionnelle définie précédemment est une réponse idéalisée. Une **réponse impulsionnelle expérimentale** peut être obtenue en soumettant le système à une impulsion, de forme quelconque, contenant assez d'énergie, et de durée suffisamment brève par rapport à la plus petite des constantes de temps caractéristiques du système.

Remarque : G est BIBO stable si g(t) tend vers 0 quand t tend vers l'infini i.e si : $\int_0^{\infty}|g(\tau)|d\tau$ borné

SYSTEMES 1. Réponse fréquentielle d'un SIL

La **réponse fréquentielle** ou **harmonique** d'un SIL est définie comme la **TF G(ω) de sa réponse impulsionnelle g(t)**. On peut l'interpréter en considérant la réponse du système au signal harmonique exp(jωt). En effet, en posant $t - \tau = u$ dans le produit de convolution précédent, il vient :

$$G[e^{j\omega t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau}g(t-\tau)d\tau = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega u}g(u)du = e^{j\omega t}G(\omega)$$

Ainsi, la réponse du SIL au signal harmonique est un signal harmonique de même fréquence angulaire ω, le coefficient de proportionnalité entre la sortie et l'entrée G(ω) ne dépend que de ω. Soient M(ω) le module de G(ω) et φ(ω) l'argument de G(ω). La réponse impulsionnelle g(t) étant réelle, $G(-\omega) = G^*(\omega)$ et le module et l'argument sont des fonctions respectivement paire et impaire de ω :

$$G(\omega) = |G(\omega)|e^{j\angle G(\omega)} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \text{ avec } M(-\omega) = M(\omega) \text{ et } \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

En particulier, la réponse d'un SIL à un signal sinusoïdal de pulsation ω_0 est un signal sinusoïdal de même pulsation ω_0, déphasé de $\varphi(\omega_0)$ et multiplié par $M(\omega_0)$:

$$G[\cos\omega_0 t] = M(\omega_0)\cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))$$

Pour cette raison, M(ω) est appelé **gain** du système et φ(ω) **déphasage** du système.

NB : les signaux harmoniques considérés sont des signaux permanents, par conséquent, les réponses correspondantes sont des réponses permanentes. Effectuer la **détermination expérimentale de la réponse fréquentielle d'un SIL** consiste à lui appliquer diverses sinusoïdes, de fréquences couvrant son domaine de fonctionnement, et à relever le gain et le déphasage correspondants. Mais ceci suppose que les propriétés précédentes soient vérifiées, c'est à dire qu'il faut attendre, avant chaque mesure, que le système soit en **régime permanent** ou **établi**.

D'autre part, par TF du produit de convolution précédent, on a immédiatement, pour un signal d'entrée quelconque :

$$Y(\omega) = G(\omega)X(\omega)$$

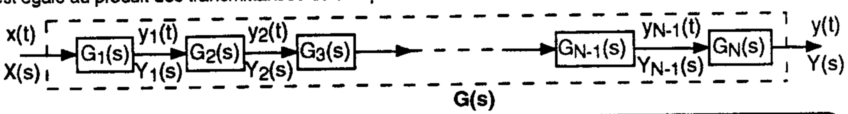
On en déduit notamment que la **réponse fréquentielle d'une cascade** de SIL est égale au **produit des réponses fréquentielles** de chaque SIL

SYSTEMES 1. Fonction de transfert d'un SIL

La **fonction de transfert (FT)** ou **transmittance** d'un SIL continu est définie comme la **TL G(s) de sa réponse impulsionnelle g(t)**. La réponse y(t) du SIL à une entrée quelconque x(t) étant égale au produit de convolution entre x(t) et la réponse impulsionnelle g(t), on a alors :

$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s) \qquad Y(s) = G(s)X(s)$$

Par conséquent, **la transformée de Laplace de la sortie d'un SIL continu est égale au produit de la transformée de Laplace du signal d'entrée par la fonction de transfert.** Il en résulte, comme pour la réponse fréquentielle, que la transmittance d'un système formé par plusieurs SIL continus en cascade est égale au produit des transmittances de chaque SIL :



$$y(t) = y_{N-1}(t)*g_N(t) = y_{N-2}(t)*g_{N-1}(t)*g_N(t) = \ldots = x(t)*g_1(t)*g_2(t)*\ldots*g_N(t)$$

$$Y(s) = Y_{N-1}(s)G_N(s) = Y_{N-2}(s)G_{N-1}(s)G_N(s) = \ldots = X(s)\underbrace{G_1(s)G_2(s)\ldots G_N(s)}_{G(s)}$$

Remarques :
- Dans le cadre de l'étude des SIL causals, on utilise exclusivement la **TL monolatère**.
- La fonction de transfert (de même que la réponse fréquentielle) d'un SIL est propre à celui-ci et ne dépend pas de l'amplitude ou de la nature du signal d'entrée.
- La fonction de transfert inclut la correspondance d'unité entre l'entrée et la sortie, mais ne donne aucune information sur la structure physique du système (des systèmes physiquement très différents peuvent avoir une transmittance identique).

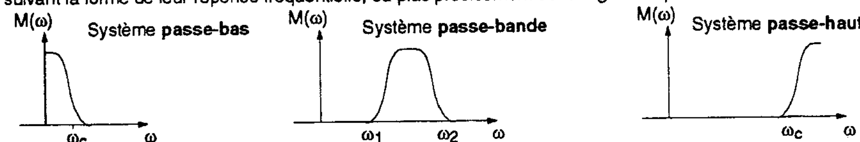
SYSTEMES 1. FT (suite) / Classification spectrale

Remarques :
- Si la FT d'un système est connue, la compréhension de son fonctionnement peut être abordée à travers l'étude de sa réponse à diverses entrées.
- La **détermination expérimentale de la FT** d'un SIL, c'est à dire l'**identification** du système peut s'effectuer bien sûr à partir de sa réponse impulsionnelle expérimentale, mais aussi en analysant sa réponse à des signaux d'entrée connus.
- La réponse impulsionnelle d'un SIL BIBO stable étant un signal absolument sommable, sa transformée de Fourier se déduit directement de sa transformée de Laplace en posant s = jω. En conséquence, **la réponse fréquentielle d'un SIL stable s'obtient en posant s = jω dans la fonction de transfert** :

$$G(\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$

Finalement, il apparaît que le comportement dynamique d'un système continu monovariable invariant linéaire G est **entièrement caractérisé, et de manière équivalente**, soit par sa réponse impulsionnelle g(t), soit par sa réponse fréquentielle G(ω), ou enfin par sa fonction de transfert G(s).

De manière similaire à ce qui avait été fait pour les signaux, on peut distinguer différents types de SIL suivant la forme de leur réponse fréquentielle, ou plus précisément de leur gain fréquentiel :



Un tel système, caractérisé par sa **pulsation de coupure** ω_c, filtre les hautes fréquences.

La **largeur de bande** ou **bande passante** de ce système est donnée par $\omega_2 - \omega_1$.

Il existe aussi des systèmes **coupe-bande**, par ailleurs, on peut distinguer les systèmes à **large bande** des systèmes à **bande étroite**.

SIL physiques

Une part importante des systèmes physiques monovariables, en particulier mécaniques ou électriques, sont modélisés mathématiquement par une équation différentielle linéaire à coefficients réels constants, dont l'ordre dépend de la complexité du système considéré :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_r \frac{d^r x}{dt^r} + b_{r-1}\frac{d^{r-1}x}{dt^{r-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

soit $\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{r} b_i \frac{d^i x}{dt^i}$ (système d'ordre n) En général, $r \leq$ (voire <) n pour les systèmes physiques (inertie).

Ces systèmes ne sont pas linéaires au sens où on l'a défini jusqu'à présent. En effet, la solution d'une telle équation différentielle va inclure des termes dépendant des conditions initiales qui détruisent la linéarité. **Exemple :** soit le système régi par l'équation différentielle du 1er ordre $\dot{y} + ay = x$

On montre que la solution générale s'écrit :
$$y(t) = \underbrace{y(t_0)}_{\text{constante arbitraire, indépendante de } x(t)} e^{-a(t-t_0)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} x(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau}_{\text{convolution}}$$

Ainsi, la linéarité est assurée si **toutes les conditions initiales** (ou **auxiliaires**) **sont supposées nulles**. L'effet, **additif**, des conditions auxiliaires peut être traité de façon indépendante, c'est pourquoi ces systèmes sont parfois qualifiés de systèmes incrémentalement ou additivement linéaires. Par ailleurs, on peut montrer que pour garantir la causalité du système, celui-ci doit être supposé **initialement au repos**, c'est à dire que, $x(t)$ étant l'entrée appliquée au système à l'instant t_0, et donc $x(t) = 0$ pour $t \leq t_0$, $y(t)$ doit être nul également pour $t \leq t_0$.

FT RATIONNELLES

Avec les hypothèses précédentes, il est facile d'établir la FT du système à partir de l'**image par transformée de Laplace** (monolatère) **de l'équation différentielle.** En pratique, les signaux d'entrée étant bornés et les systèmes stables, les sorties sont bornées et l'abscisse de convergence de la TL σ est égale à 0. Le plus simple est de raisonner sur un exemple :

$$a_3\dddot{y}(t) + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t) \xrightarrow{\text{TLaplace}}$$

$$a_3[s^3Y(s) - s^2y(0^-) - s\dot{y}(0^-) - \ddot{y}(0^-)] + a_2[s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-)] \cdots$$
$$+ a_1[sY(s) - y(0^-)] + a_0Y(s) = b_0X(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}}_{\text{fonction de transfert}} X(s) + \frac{(a_3s^2 + a_2s + a_1)y(0^-) + (a_3s + a_2)\dot{y}(0^-) + a_3\ddot{y}(0^-)}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

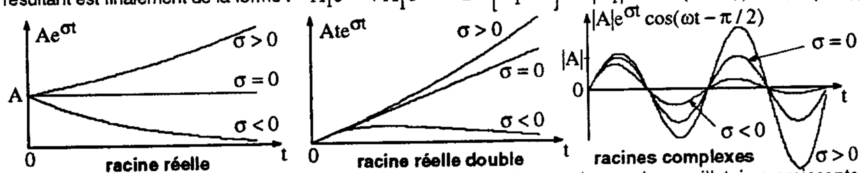
Commentaires : Le premier terme du membre de droite représente ici la **réponse forcée** du système, c'est à dire la solution de l'équation avec second membre. Le deuxième terme, tributaire des conditions initiales, représente la **réponse libre** du système, soit la solution de l'équation sans second membre. Si l'équation de départ fait intervenir des dérivées de l'entrée, les termes correspondants font partie de la réponse forcée.
On constate que la fonction de transfert se présente sous la forme d'une fraction rationnelle en s. Le dénominateur de la FT n'est autre que l'**équation caractéristique** du système, par conséquent, **les racines de l'équation caractéristique sont les pôles de la FT.** Lorsque des dérivées de l'entrée interviennent, la FT comporte également des **zéros**. La FT est donc caractérisée par la position de ses pôles et de ses zéros dans le plan en s.
Si le système présente un **retard pur** T, la FT est le produit d'une fraction rationnelle par exp(-sT).

REPONSE LIBRE - MODES

La réponse libre est définie comme la réponse à des conditions initiales définies, le signal d'entrée étant nul, c'est donc la solution de l'équation différentielle sans second membre. Si les n racines, notées s_i, de l'équation caractéristique $a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$ sont distinctes, l'équation différentielle possède n solutions linéairement indépendantes : $y_1 = \exp(s_1 t)$, $y_2 = \exp(s_2 t)$, ... , $y_n = \exp(s_n t)$ appelées **modes du système**. La solution complète est une **combinaison linéaire des modes** :

$y_L(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{s_i t}$ Les coefficients A_i dépendent des conditions initiales. A chaque racine multiple s_k, de multiplicité n_k correspondent n_k modes : $e^{s_k t}, te^{s_k t}, t^2 e^{s_k t}, \ldots, t^{n_k - 1} e^{s_k t}$

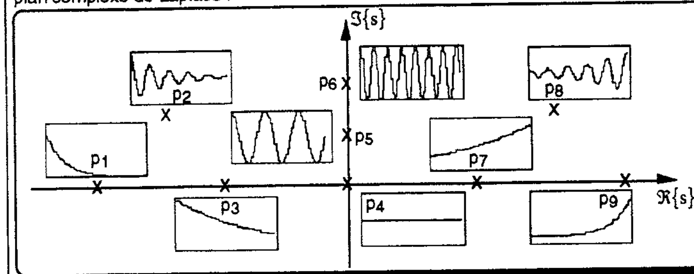
Finalement, la réponse libre est une somme de signaux de la forme : $A_i e^{s_i t}$ ou $A_i t^{m} e^{s_i t}$
Pour des systèmes physiques, les coefficients de l'équation caractéristique sont réels, par conséquent, les racines $s_i = \sigma_i + j\omega_i$ sont réelles $s_i = \sigma_i$, ou bien complexes, mais apparaissent alors par paires de conjugués $s_i = \sigma_i + j\omega_i$ et $s_i^* = \sigma_i - j\omega_i$. De plus, dans ce dernier cas, les modes correspondants sont **oscillatoires.** Si on suppose la présence d'une paire de racines complexes $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$, la réponse étant réelle, les coefficients correspondants A_1 et A_2 sont forcément complexes conjugués, et le mode résultant est finalement de la forme : $A_1 e^{s_1 t} + A_1^* e^{s_1^* t} = 2\Re\{A_1 e^{s_1 t}\} = 2|A_1| e^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)$ où $\varphi = |\angle A_1|$



Dans le cas, plus rare, de racines complexes multiples, on observe des modes oscillatoires croissants dès que $\sigma_i \geq 0$. Finalement, tous les modes tendent vers zéro si : $\sigma_i = \Re\{s_i\} < 0$

MODES - STABILITE

Les racines de l'équation caractéristique n'étant autres que les pôles de la fonction de transfert, on peut représenter les différents modes possibles d'un système en fonction de la position de ces pôles dans le plan complexe de Laplace :



Les **constantes de temps** du système sont données par :

$$T_i = \left|\frac{1}{\sigma_i}\right| \quad (\sigma_i \neq 0)$$

Ainsi qu'on l'a dit précédemment, tous les modes tendent vers zéro si tous les pôles de la FT sont à partie réelle négative. Or, on a vu auparavant, qu'un système est dans un état d'équilibre stable si, écarté de cet état, il tend à y revenir, éventuellement en oscillant. Donc, en particulier, la sortie d'un système stable à entrée nulle, c'est à dire en régime libre, doit tendre vers zéro et ce, quelque soient les conditions initiales. En définitive, on peut énoncer la condition de stabilité d'un SIL :

Un SIL n'est stable que si la partie réelle des pôles de sa fonction de transfert (ou des racines de son équation caractéristique) **est négative,** c'est à dire **si les pôles sont tous situés dans le demi plan complexe gauche.**

Un système avec un pôle simple ou multiple en 0, ou une paire de pôles simples sur l'axe imaginaire, est à la **limite de stabilité. Remarque :** si la sortie d'un SIL instable croît indéfiniment en théorie, dans la réalité, elle atteint une valeur limite, ou un régime oscillant limite.

SYSTEMES 1. Réponse forcée - Autres réponses — 19

Un système est en **régime forcé** lorsqu'il est soumis, à partir de son état d'équilibre, à un signal d'entrée, ce dernier étant appliqué à l'instant t_0 tel que : $y(t_0)=\dot{y}(t_0)=\ldots=\overset{(n-1)}{y}(t_0)=0$

La **réponse forcée** n'est pas tributaire des conditions initiales et dépend uniquement du signal d'entrée, c'est la **solution de l'équation différentielle avec second membre**. On montre qu'elle s'écrit de manière générale comme le produit de convolution entre la **fonction force** e(t) et la réponse libre $\gamma(t)$ obtenue pour les conditions initiales : $y(t_0)=\dot{y}(t_0)=\ldots=\overset{(n-2)}{y}(t_0)=0$ et $\overset{(n-1)}{y}(t_0)=\frac{1}{a_n}$

$$y_F(t)=\int_{t_0}^{t}\gamma(t-\tau)e(\tau)d\tau \text{ où } e(t)=\sum_{i=0}^{r}b_i\overset{(i)}{x}(t) \text{ et } \gamma(t)/g(t)=\sum_{i=0}^{r}b_i\overset{(i)}{\gamma}(t)$$

La **réponse totale** est la somme de la réponse libre et de la réponse forcée : $y(t)=y_L(t)+y_F(t)$

La **réponse permanente** (ou régime permanent) est la partie de la réponse totale qui subsiste quand t tend vers l'infini (physiquement, cela correspond à un temps d'au moins 5 à 10 fois la plus grande des constantes de temps du système). Le théorème de la valeur finale est utile pour caractériser le régime permanent. Au contraire, la **réponse transitoire** (ou régime transitoire) est la partie de la réponse totale qui disparaît quand t tend vers l'infini.

La **réponse indicielle** d'un système est sa réponse à un échelon unitaire. Celle-ci est très souvent utilisée en pratique pour caractériser un système. C'est en effet un excellent signal d'épreuve comportant à la fois des hautes (changement brusque) et des basses (valeur constante) fréquences. On utilise également la réponse à la rampe.

SYSTEMES 1. Critère de stabilité de Routh — 20

Pour les systèmes d'ordre supérieur à 2, il n'est pas facile de calculer les racines de l'équation caractéristique. Le critère de Routh - Hurwitz (1874-1895) permet de déterminer le nombre de racines d'un polynôme situées dans le demi plan droit sans exiger la factorisation du polynôme. La procédure à suivre est la suivante :

1. Ecrire l'équation caractéristique sous la forme : $a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0=0$

On suppose que $a_0\neq 0$, c'est à dire qu'on s'est débarassé d'éventuelles racines nulles.

2. Une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que toutes les racines soient à partie réelle négative est la suivante : **tous les coefficients a_i doivent exister** (être $\neq 0$) **et être de même signe** (en général positif). Si cette condition n'est pas vérifiée et si l'on ne s'intéresse qu'à la stabilité absolue du système, on peut conclure que celui-ci est instable et la procédure est terminée.

3. Former le tableau de Routh suivant :

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	…		a_0 (n pair)
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	…		a_0 (n impair)
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	…		0
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	…	0		0
s^{n-4}	d_1	d_2	…	0	⋰		⋮
⋮	⋮	⋮	⋰				
s^1	e_1	0	0	…			
s^0	f_1	0	…				0

$b_1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_na_{n-3}}{a_{n-1}}$ $c_1=\frac{b_1a_{n-3}-b_2a_{n-1}}{b_1}$

$b_2=\frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_na_{n-5}}{a_{n-1}}$ $c_2=\frac{b_1a_{n-5}-b_3a_{n-1}}{b_1}$

$b_3=\frac{a_{n-1}a_{n-6}-a_na_{n-7}}{a_{n-1}}$ $c_3=\frac{b_1a_{n-7}-b_4a_{n-1}}{b_1}$

⋮ ⋮

$d_1=\frac{c_1b_2-b_1c_2}{c_1}$ $d_2=\frac{c_1b_3-b_1c_3}{c_1}$ …

SYSTEMES 1. Critère de Routh (suite) — 21

Le processus décrit précédemment est poursuivi jusqu'à obtention de n + 1 lignes. Afin de simplifier les calculs, il est possible de multiplier une ligne par une constante positive avant de calculer la suivante. Le critère de Routh peut alors s'appliquer :

La partie réelle des racines de l'équation caractéristique est négative, et donc, le système est stable, si les n + 1 termes de la 1ère colonne du tableau de Routh ont le même signe (en général positif). **Le nombre de racines** (comptées avec leur multiplicité) **à partie réelle positive** (racines "instables") **est égal au nombre de changements de signe dans cette colonne.**

Exemple :

$s^4+2s^3+3s^2+4s+5=0$

simplification par 2 →

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
	1	2	0
s^2	1	5	
s^1	−3		
s^0	5		

Instable, 2 changements de signe, donc 2 racines à partie réelle positive.

Cas particulier : si l'un des termes de la 1ère colonne est nul, les autres termes de la même ligne étant non-nuls, on remplace le terme nul par un nombre positif ε très petit pour finir le tableau. Si le signe du coefficient situé au dessus du ε est le même que celui du coefficient du dessous, cela indique la présence d'une paire de racines imaginaires, si ces signes sont opposés, cela compte comme un changement de signe. Remarque : on peut aussi refaire le tableau en remplaçant s par s^{-1} dans le polynôme, ce qui généralement supprime le terme nul.

Exemples :

$s^3+2s^2+s+2=0$

s^3	1	1
s^2	2	2
s^1	$0\approx\varepsilon$	
s^0	2	

Présence d'une paire de racines imaginaires, ici, ± j.

$s^3-3s+2=(s-1)^2(s+2)=0$

s^3	1	−3
s^2	$0\approx\varepsilon$	2
s^1	$-3-2/\varepsilon$	
s^0	2	

2 changements de signe, ici, une racine "instable" double = 1.

SYSTEMES 1. Critère de Routh (suite) — 22

Autre cas particulier : une ligne entière de zéros indique la présence de paires de racines réelles de même module mais de signe opposé et / ou de paires de racines imaginaires conjuguées. Dans ce cas, le tableau peut être achevé en formant un **polynôme auxiliaire** avec les coefficients de la dernière ligne non-nulle, et en utilisant les coefficients du polynôme obtenu par dérivation du polynôme auxiliaire pour la ligne suivante. Les paires de racines peuvent être obtenues par factorisation du polynôme auxiliaire qui est toujours pair. Si son degré est 2m, il y aura donc m paires de racines.

Exemple :

$D(s)=s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0$

s^5	1	24	−25
s^4	2	48	−50
s^3	0	0	

→ $P(s)=2s^4+48s^2-50$

$\frac{dP(s)}{ds}=8s^3+96s$

s^5	1	24	−25
s^4	2	48	−50
s^3	8	96	
s^2	24	−50	
s^1	112,7	0	
s^0	−50		

un changement de signe, donc une racine à partie réelle positive dans le polynôme de départ D(s).

La résolution de l'équation P(s) = 0 conduit aux solutions $s^2 = 1$ et $s^2 = -25$, d'où finalement :

$$D(s)=(s+1)(s-1)(s+5j)(s-5j)(s+2)$$

Stabilité relative : pour avoir une idée de la marge de stabilité, on peut faire le changement s = s' - σ, σ constante quelconque, dans l'équation caractéristique, avant construction du tableau. Le critère révèle alors le nombre de racines situées à droite de la droite verticale s = -σ.

Remarque : en automatique, on est souvent confronté à des équations caractéristiques comportant un ou plusieurs paramètres. Le critère de Routh permet alors d'établir des conditions sur ceux-ci.

Le **gain statique** d'un SIL est le gain, i.e le module de la réponse fréquentielle, à la fréquence 0. Physiquement, c'est le rapport entre l'amplitude de la sortie et de l'entrée en régime permanent :

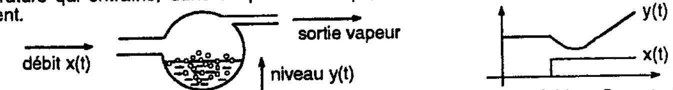
$$\frac{\lim_{t\to\infty} y(t)}{\lim_{t\to\infty} x(t)}=\frac{\lim_{s\to 0} sY(s)}{\lim_{s\to 0} sX(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{Y(s)}{X(s)}=\lim_{s\to 0} G(s)=\frac{b_0}{a_0}=K_s$$

Lorsque le paramètre a_0 est nul, i.e s est en facteur au dénominateur de la FT, on dit que le système comporte une **intégration**. Le gain statique étant dans ce cas infini, on définit le **gain en vitesse** : $K_v=\frac{b_0}{a_1}$

Systèmes à déphasage non-minimal : ce sont les systèmes dont le déphasage est non-nul en basse fréquence. La commande automatique de ces systèmes est souvent délicate. On distingue deux cas : les **systèmes à retard pur** et les **systèmes comportant des zéros à partie réelle positive.**

Systèmes à retard pur : les retards purs physiques sont liés à des phénomènes de transfert (retard dû au temps de propagation d'une onde, au temps de déplacement d'une pièce, de transport de produit, etc.). On peut aussi se servir d'un retard pur pour modéliser des constantes de temps dont la valeur est faible par rapport à la constante de temps principale d'un système. La fonction de transfert d'un retard pur T est égale à exp(-sT) (gain constant = 1 et déphasage = -ωT).

Systèmes à zéros "instables" : ces systèmes sont lents car ils sont caractérisés par des réponses indicielles à départ inverse. Exemple : générateur de vapeur. L'arrivée d'eau froide crée une baisse de température qui entraîne, dans un premier temps, une baisse du volume de bulles donc du niveau apparent.



Remarque : On peut généraliser la notion de FT aux systèmes multivariables. On est alors confronté à un système d'équations différentielles, pour lequel on peut mettre en évidence une **matrice de transfert**, constituée de FT élémentaires, chacune représentant l'influence d'une entrée sur une sortie, les autres entrées étant nulles. En automatique moderne, on fait plutôt appel à la **représentation d'état**, qui permet de grandement simplifier et améliorer l'analyse des systèmes multivariables.

Il existe plusieurs façons de représenter la réponse fréquentielle d'un système : **diagramme de Black, diagramme de Bode, diagramme de Nyquist**. Ces différents modes de représentation utilisent soient le module et l'argument de la réponse fréquentielle, soit les parties réelles et imaginaires.
On rappelle ici quelques règles élémentaires concernant les complexes, utiles dans de nombreux cas :

Soit $G(j\omega)=\frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_q(j\omega)}{G'_1(j\omega)G'_2(j\omega)\cdots G'_p(j\omega)}$

$$|G(j\omega)|=\frac{|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|\cdots|G_q(j\omega)|}{|G'_1(j\omega)||G'_2(j\omega)|\cdots|G'_p(j\omega)|}$$

et $\angle G(j\omega)=\sum_{i=1}^{q}\angle G_i(j\omega)-\sum_{i=1}^{p}\angle G'_i(j\omega)$

En particulier : $\left|\frac{a+jb}{c+jd}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$ et $\angle\left\{\frac{a+jb}{c+jd}\right\}=\angle\{a+jb\}-\angle\{c+jd\}=\mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)-\mathrm{arctg}\left(\frac{d}{c}\right)$

Diagramme de Black :

Dans ce type de diagramme, on représente le **gain**, c'est à dire le module de la réponse fréquentielle M(ω), exprimé en décibels, **en fonction du déphasage**, c'est à dire l'argument de la réponse fréquentielle φ(ω), exprimé en degrés. La courbe obtenue, appelée **lieu de Black**, est graduée en ω.
Cette représentation est particulièrement adaptée à certaines méthodes de synthèse de correcteur, utilisées en automatique.

Diagramme de Bode :

Le diagramme de Bode est constitué de **deux graphes distincts**, représentant respectivement **l'évolution du gain** du système M(ω) en **décibels** et du **déphasage** φ(ω) en degrés, **en fonction de la pulsation** ω. Les échelles utilisées sont logarithmiques, sauf pour la phase :

- en abscisse, on utilise $\log(\omega/\omega_0)$, où ω_0 est une valeur de référence quelconque, ou bien on utilise ω/ω_0 mais avec une échelle logarithmique, ce qui permet, dans les deux cas de faire une exploration étendue de la réponse fréquentielle.
- en ordonnée, $M(\omega)_{dB} = 20 \log M(\omega)$. Avec cette graduation, l'échelle redevient linéaire. L'échelle utilisée pour la phase est linéaire.

L'intérêt du diagramme de Bode réside dans le fait que le Bode d'un système constitué d'une cascade de sous-systèmes, est égal à la somme graphique des Bode des sous-systèmes, en effet :

Si $G(\omega)=G_1(\omega)G_2(\omega)$, $|G_1(\omega)G_2(\omega)|=|G_1(\omega)||G_2(\omega)|\rightarrow|G_1(\omega)G_2(\omega)|_{dB}=|G_1(\omega)|_{dB}+|G_2(\omega)|_{dB}$

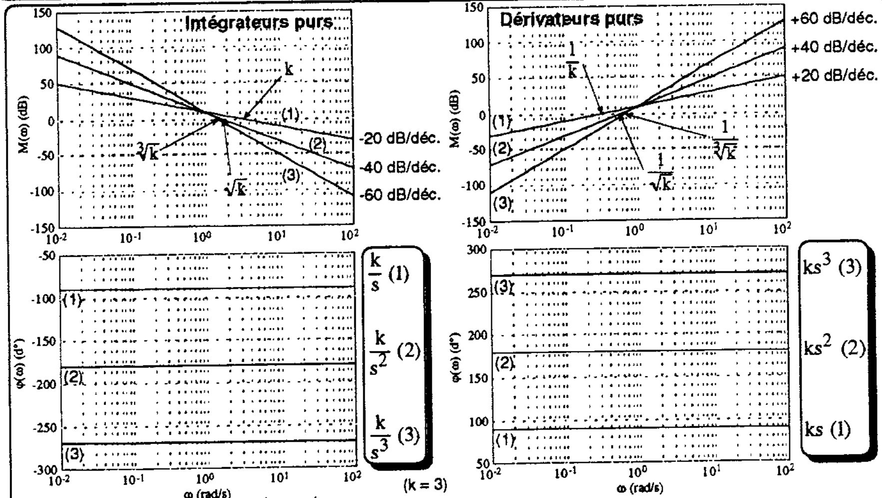
De plus, $\angle\{G_1(\omega)G_2(\omega)\}=\angle\{G_1(\omega)\}+\angle\{G_2(\omega)\}$

Le diagramme de Bode peut être tracé manuellement, soit à partir d'un relevé expérimental de la réponse fréquentielle, soit à partir de la connaissance de la FT. Dans ce dernier cas, pour des systèmes complexes, un tracé précis peut être obtenu à l'aide d'outils logiciels dits de **CAO de l'automatique**. Sans l'aide de l'informatique, il est toujours possible de tracer un **diagramme asymptotique**.

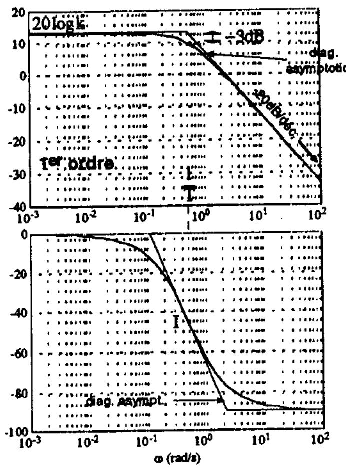
Pour tracer un Bode à partir de la FT, on décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs du 1er et du 2ème ordre et d'éventuelles intégrations (ou dérivations) :

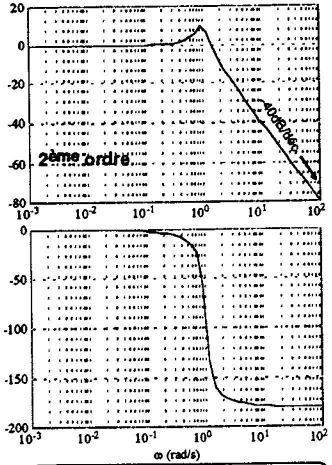
$$G(s)=\frac{(s+z_1)\cdots(s+z_q)(s^2+\beta_1 s+\beta_0)\cdots(s^2+\gamma_1 s+\gamma_0)}{s^m(s+p_1)\cdots(s+p_k)\cdots(s^2+\alpha_1 s+\alpha_0)\cdots(s^2+\lambda_1 s+\lambda_0)}$$

Le Bode global se déduit alors facilement de la connaissance des Bode typiques de chaque facteur.



Ex: $\frac{3}{s^3}\rightarrow M_{dB}(\omega)=20\log\left|\frac{3}{(j\omega)^3}\right|=20\log 3-60\log\omega$; $M_{dB}(10\omega)=20\log 3-60\log(10\omega)$
$=9{,}54$ dB$-60\log\omega-60$ dB





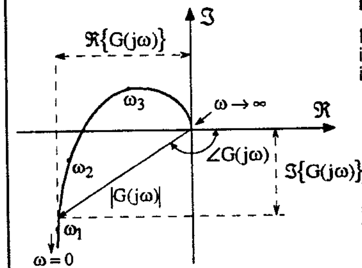
$\frac{k}{1+sT}$; $k=4{,}5$; $T=2$

$\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$; $\omega_0=1$; $\zeta=0{,}15$

Remarque : la FT d'un système peut aisément être obtenue à partir du diagramme de Bode (ou approchée s'il s'agit d'une réponse fréquentielle expérimentale). Dans le cas des systèmes à minimum de phase, le diagramme en gain est suffisant.

Diagramme de Nyquist :

L'avantage de la représentation de Nyquist est de concentrer le comportement fréquentiel sur toute la gamme de fréquence, en un seul diagramme. Elle utilise une représentation en coordonnées polaires dans le plan complexe. Ainsi, la courbe obtenue, appelée **lieu de Nyquist**, et qui doit être **graduée en pulsation** de $\omega = 0$ à $\omega = +\infty$, est le **lieu parcouru par l'extrémité du vecteur $G(j\omega) = M(\omega).\exp[j\varphi(\omega)]$** lorsque ω varie de zéro à l'infini. Bien sûr, les projections de $G(j\omega)$ sur les axes réel et imaginaire sont ses parties réelle et imaginaire.

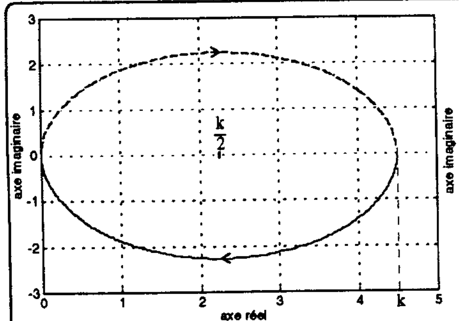


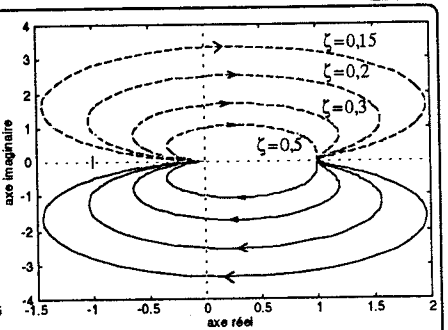
Exemples :

Le Nyquist d'un intégrateur simple 1/s est le demi-axe imaginaire négatif, celui du dérivateur s est le demi-axe imaginaire positif :

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}=-j\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\omega}\angle-90° \qquad G(j\omega)=j\omega=\omega\angle+90°$$

Par ailleurs, on montre que le diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre a la forme d'un demi-cercle, tandis que celui d'un deuxième ordre est une demi-cardioïde (voir transparent suivant).



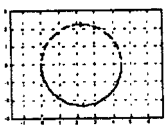


1er ordre : $\frac{k}{1+sT}$; $k=4{,}5$; $T=2$

2ème ordre : $\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$; $\omega_0=1$

$\frac{k}{1+j\omega T}$ $\quad \omega=0 : G(j\omega)=k\angle 0°$ $\quad \omega\to\infty : G(j\omega)\to 0\angle-90°$ $\quad \omega=\frac{1}{T} : G(j\omega)=\frac{k}{\sqrt{2}}\angle-45°$

$$\left(\Re\{G(j\omega)\}-\frac{k}{2}\right)^2+\left(\Im\{G(j\omega)\}\right)^2=\left(\frac{k}{1+\omega^2T^2}-\frac{k}{2}\right)^2+\left(\frac{-k\omega T}{1+\omega^2T^2}\right)^2=\left(\frac{k}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

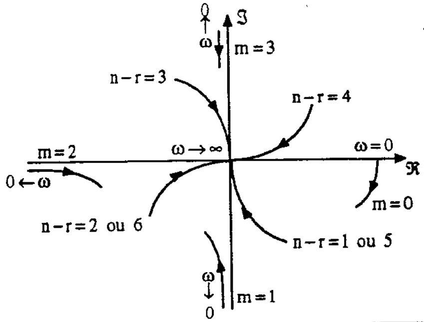


Construction : soit une réponse fréquentielle de la forme (n > r) :

$$G(j\omega)=\frac{b_r(j\omega)^r+\ldots+b_1 j\omega+b_0}{a_n(j\omega)^n+\ldots+a_1 j\omega+a_0} \text{ ou } G(j\omega)=\frac{b_r(j\omega)^r+\ldots+b_1 j\omega+b_0}{(j\omega)^m\left(a_{n-m}(j\omega)^{n-m}+\ldots+a_1 j\omega+a_0\right)}$$ si G(s) comporte des intégrations

$$[G(j\omega)]_{\omega\to 0}=\frac{b_0}{a_0}\angle 0° \qquad [G(j\omega)]_{\omega\to 0}\cong\frac{b_0}{a_0(j\omega)^m}\Rightarrow\begin{cases}M(\omega)\to\infty\\ \varphi(\omega)\to -m.90°\end{cases}$$ **Comportement en basse fréquence**

$$[G(j\omega)]_{\omega\to\infty}\cong\frac{b_r(j\omega)^r}{(j\omega)^m a_{n-m}(j\omega)^{n-m}}=\frac{b_r}{a_{n-m}(j\omega)^{n-r}}\Rightarrow\begin{cases}M(\omega)\to 0\\ \varphi(\omega)\to -(n-r).90°\end{cases}$$ **Comportement en haute fréquence**



Pour les systèmes de **type 0** (m = 0), la tangente au départ du Nyquist est verticale. Lorsque le système comporte une ou plusieurs dérivations (cas rare : une puissance de s en facteur au numérateur), le Nyquist démarre de l'origine. De façon générale, le lieu peut decroître continûment en module, ou bien présenter un (ou plusieurs) renflement(s) correspondant à une (des) résonance(s).

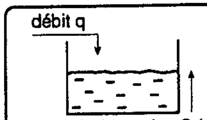
La représentation de Nyquist est très prisée par les automaticiens, qui l'utilisent notamment pour analyser la stabilité et la **correction** des systèmes bouclés. Dans le premier cas, la connaissance du départ et de l'arrivée du Nyquist, ainsi que d'un point particulier (**point critique**, v. 3.14) est souvent suffisante. Dans le second cas, on a besoin de connaître la forme du diagramme dans toute la zone du point critique.

Exemple introductif : on considère un véhicule en mouvement, dont on mesure la vitesse de déplacement v(t). La position du véhicule à un instant donné t_1 est donnée par :

$$y(t_1)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} v(\tau)d\tau$$

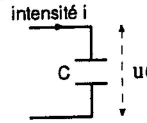
Pour simplifier, on peut considérer que y(t) est la distance parcourue entre t_0 et t_1, et est donc donné par le compteur kilométrique journalier. Si celui-ci a été remis à zéro, $y(t_0) = 0$.

Pour bien comprendre la relation précédente, supposons que le voyage a duré 4 heures et que la vitesse du véhicule était de 80 km/h pendant les deux premières heures, puis de 100 km/h. La distance parcourue est alors donnée par : 80 km/h x 2 h + 100 km/h x 2 h = 360 km.
On retrouve dans cette dernière équation les notions de produit vitesse x temps et de sommation ou d'accumulation des distances partielles parcourues. Si on considère à présent que le temps durant lequel le véhicule roule à vitesse parfaitement constante est infiniment petit $d\tau$, ce qui est bien plus conforme à la réalité physique, la distance parcourue est obtenue par l'intégrale (on dit souvent "somme de t_0 à t_1") du produit vitesse $v(\tau)$ par durée $d\tau$.
Ainsi, **l'intégrale traduit la notion physique de sommation ou d'accumulation.** Un système à comportement intégral ou intégrateur est caractérisé par une FT de la forme : **K/s.** Il agit comme un réservoir. **Exemples :**



Réservoir de section S (vide au départ)

$$V(t)=S.h(t)=\int_0^t q(\tau)d\tau \rightarrow \frac{H(s)}{Q(s)}=\frac{1}{S.s}$$



à conditions initiales nulles :

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \rightarrow \frac{U(s)}{I(s)}=\frac{1}{C.s}$$

Le condensateur joue donc le rôle de "réservoir" de tension. Sa capacité est analogue à la section du réservoir, d'ailleurs parfois appelée capacitance.

Réponses temporelles :

La réponse d'un intégrateur à un signal canonique s'obtient immédiatement. Si l'entrée est une impulsion, la sortie, c'est à dire la **réponse impulsionnelle**, peut être obtenue comme l'original de la FT, ou simplement en intégrant l'entrée, soit **un échelon**.

La **réponse indicielle**, c'est à dire la réponse à un échelon, est **une rampe**, etc.
Ces caractéristiques sont celles d'un système **à la limite de stabilité**.

Réponse fréquentielle :

voir précédemment (Bode : gain = droite de pente -20 dB/déc., phase constante à -90°).
Les systèmes intégrateurs sont des **systèmes passe-bas**.

Remarque : on rencontre également des systèmes intégrateurs d'ordre supérieur, exemple : système à inertie. Il correspond au mouvement de translation (rotation) d'un véhicule libre de tout frottement et de toute force (couple) de rappel (satellite sur son orbite). Soit u(t) la force (couple) appliquée au système, l'équation différentielle est de la forme :

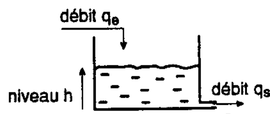
$$\ddot{y}(t)=k.u(t) \rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k}{s^2}$$

L'intérêt des modèles du premier et du deuxième ordre tient au fait qu'un grand nombre de systèmes physiques peuvent être réduits à l'un ou l'autre de ces modèles. Par ailleurs, les systèmes d'ordre supérieur peuvent souvent être considérés comme des combinaisons de systèmes du 1er et 2ème ordre. Il est donc important de connaître leurs réponses aux différents signaux canoniques, ainsi que leur réponse fréquentielle, en vue de les comparer à celles des systèmes réels.
Le modèle du 1er ordre est une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants :

$$\tau\dot{y}(t)+y(t)=k.x(t) \rightarrow \boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{k}{1+s\tau}}$$

k : gain statique ; τ : constante de temps

EXEMPLES :



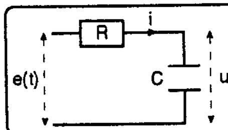
Réservoir de section S

On montre qu'en régime laminaire (ou pour de petites variations) :

$$\underset{(m^3/s)}{q_s(t)}=\frac{h(t)\,(m)}{R\,(m^{-2}.s)}$$

Résistance de la conduite

$$S.h(t)=\int_0^t[q_e(\tau)-q_s(\tau)]d\tau \rightarrow \frac{H(s)}{Q_e(s)}=\frac{1}{S.s+\frac{1}{R}}$$



$$E(s)=R.I(s)+\frac{I(s)}{Cs}=\frac{RCs+1}{Cs}I(s)$$

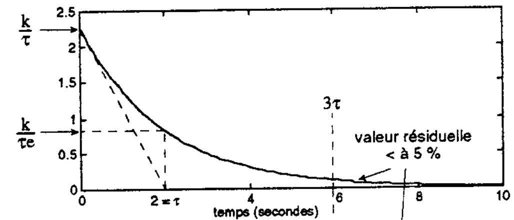
$$U(s)=\frac{I(s)}{Cs} \rightarrow \frac{U(s)}{E(s)}=\frac{1}{1+RCs}$$

Autres exemples : masse animée en translation (rotation) avec frottement, modèles de capteurs, modèle simplifié d'un moteur à courant continu, etc.

Réponse impulsionnelle :

$$Y(s)=G(s)X(s)=G(s).1$$

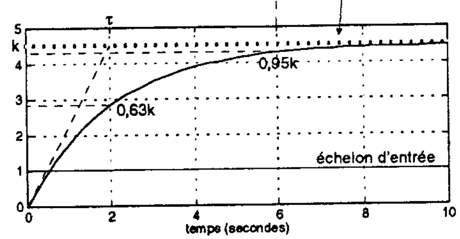
$$\boxed{\rightarrow y(t)=g(t)=\frac{k}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}.1(t)}$$



Réponse indicielle :

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{G(s)}{s}=\frac{k/\tau}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$$

$$\boxed{\rightarrow y(t)=k\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right).1(t)}$$



Réponse à la rampe : voir TD

Réponse fréquentielle : voir précédemment.

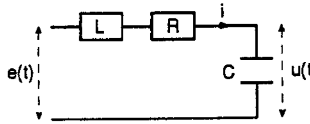
SYSTEMES 1. SYSTEMES D'ORDRE 2 — 35

Le modèle du 2ème ordre est une équation différentielle linéaire du 2ème ordre à coefficients constants :

$$a_2\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_0x(t)\rightarrow \boxed{G(s)=\frac{b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{k}{\frac{s^2}{\omega_0^2}+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+1}}$$

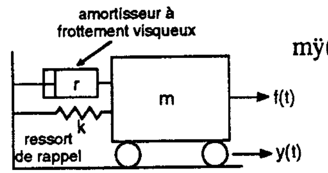
$\boxed{\text{gain statique : } k=\frac{b_0}{a_0}}$ $\boxed{\text{pulsation propre : } \omega_0=\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}}$ $\boxed{\text{coefficient d'amortissement : } \zeta=\frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}}}$

EXEMPLES :



$$E(s)=Ls.I(s)+R.I(s)+\frac{I(s)}{Cs}=\frac{LCs^2+RCs+1}{Cs}I(s)$$

$$U(s)=\frac{I(s)}{Cs}\rightarrow\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$



$$m\ddot{y}(t)=f(t)-r\dot{y}(t)-ky(t)\rightarrow Y(s)(ms^2+rs+k)=F(s)$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{m}{k}s^2+\frac{r}{k}s+1}$$

Autres exemples : moteur CC, suspension de voiture, accéléromètre, haut-parleur, etc.

SYSTEMES 1. SYSTEMES D'ORDRE 2 (suite) — 36

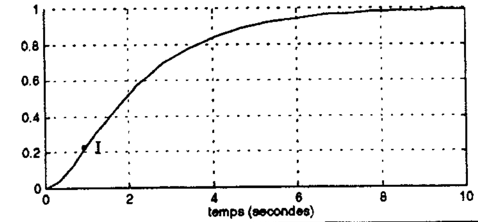
Réponses temporelles : on se contente ici d'étudier la **réponse indicielle.** Le lecteur intéressé trouvera des précisions dans de nombreux ouvrages de référence (voir aussi TD et abaques). Pour simplifier, on suppose le gain statique k = 1.

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0s+\omega_0^2}.\frac{1}{s}=\frac{\omega_0^2}{s(s-s_1)(s-s_2)}$$ soit, comme $\omega_0^2=s_1s_2$, et pour $s_1\neq s_2$:

$$Y(s)=\frac{s_1s_2}{s(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s_1-s_2}\left(\frac{s_2}{s-s_1}-\frac{s_1}{s-s_2}\right)$$

$$\rightarrow y(t)=\left[1+\frac{1}{s_1-s_2}\left(s_2e^{s_1t}-s_1e^{s_2t}\right)\right].1(t)$$ Tout dépend des racines s_1 et s_2. Le discriminant Δ étant donné par : $\Delta=\omega_0^2(\zeta^2-1)$

2ème ordre apériodique : les racines sont réelles distinctes $\rightarrow \boxed{\zeta>1}$ $s_{1,2}=\omega_0\left(-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right)$



$$t_{inflexion}=\frac{1}{|s_2|-|s_1|}\mathrm{Ln}\left|\frac{s_2}{s_1}\right|$$

La tangente initiale est horizontale. Après $t_{inflexion}$, le système se comporte à peu près comme un 1er ordre (l'une des exponentielles l'emporte sur l'autre). Ce système équivaut à deux systèmes du 1er ordre en cascade.

SYSTEMES 1. SYSTEMES D'ORDRE 2 (suite) — 37

2ème ordre critique : une racine réelle double = $-\omega_0$ $\rightarrow \boxed{\zeta=1}$ réponse d'allure identique à la précédente :

$$Y(s)=\frac{\omega_0^2}{s(s+\omega_0)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\omega_0}-\frac{\omega_0}{(s+\omega_0)^2}\rightarrow y(t)=\left[1-(1+\omega_0t)e^{-\omega_0t}\right].1(t)$$

2ème ordre pseudopériodique : racines complexes conjuguées $\rightarrow \boxed{\zeta<1}$

$$s_{1,2}=\omega_0\left(-\zeta\pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right)=a\pm jb=\omega_0e^{\pm j\phi}$$ avec $\phi=\pi-\mathrm{Arcsin}\sqrt{1-\zeta^2}\rightarrow\begin{cases}\cos\phi=-\zeta\\ \sin\phi=\sqrt{1-\zeta^2}\end{cases}$

On porte s_1 et s_2 dans l'expression de y(t) établie précédemment, en remarquant que $s_1 - s_2 = 2jb$:

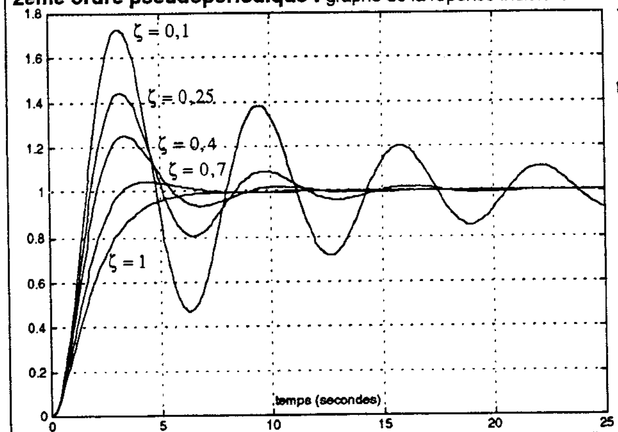
$$\rightarrow y(t)=\left[1+\frac{\omega_0}{2jb}\left(e^{-j\phi}e^{at+jbt}-e^{j\phi}e^{at-jbt}\right)\right].1(t)$$

$$\rightarrow y(t)=\left[1+\frac{\omega_0}{b}e^{at}\sin(bt-\phi)\right].1(t)\ ;\ b=\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\ ;\ a=-\omega_0\zeta$$

$$\rightarrow y(t)=\left[\underset{\text{régime permanent}}{1}-\underbrace{\frac{e^{-\zeta\omega_0t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t+\mathrm{Arcsin}\sqrt{1-\zeta^2}\right)}_{\text{régime transitoire}}\right].1(t)$$

SYSTEMES 1. SYSTEMES D'ORDRE 2 (suite) — 38

2ème ordre pseudopériodique : graphe de la réponse indicielle :



$$t_m=\frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi-\mathrm{Arc}\cos\zeta)$$

$$t_{r_{n\%}}\approx\frac{1}{\omega_0\zeta}\mathrm{Ln}\left(\frac{100}{n}\right)\ ;\ (\zeta\leqslant0{,}7)$$

$$t_{D_1}\approx\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_p=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$D_1\%=100\exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

$$\frac{D_1}{D_2}=\exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Le **temps de montée** correspond au temps mis pour atteindre la valeur finale. Le **temps de réponse à n%** est celui au bout duquel, la réponse reste dans un intervalle de ± n% de la valeur finale. Le **temps de pic** (ou de 1er dépassement) correspond au temps mis pour atteindre la valeur maximale. T_p désigne la **pseudo-période** i.e la période des oscillations. Le **taux de 1er dépassement** est défini comme l'amplitude du 1er dépassement $y(t_{D1})$ - y(∞) en pourcentage de la valeur finale y(∞).

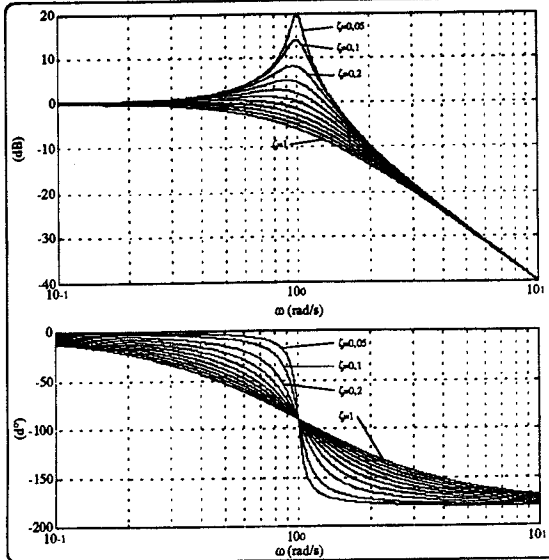


Diagramme de Bode du 2ème ordre pseudo-périodique :

pulsation de résonance

$$\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$$

pulsation de coupure (-3 dB)

$$\omega_c = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{1+(1-2\zeta^2)^2}}$$

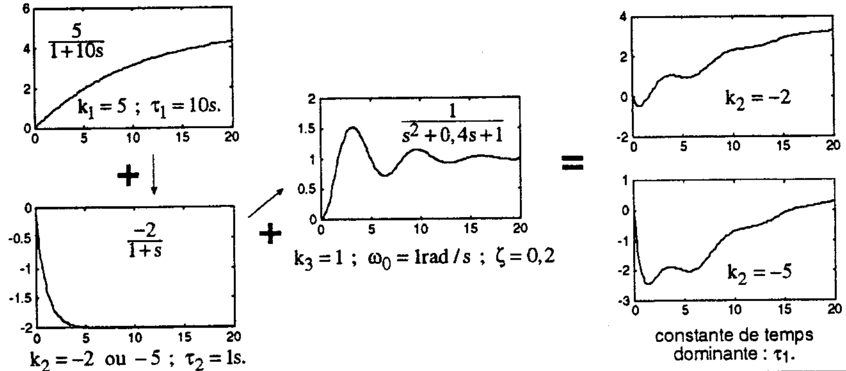
facteur de résonance (amplitude à ω_R)

$$m = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

facteur de qualité (amplitude à ω_0)

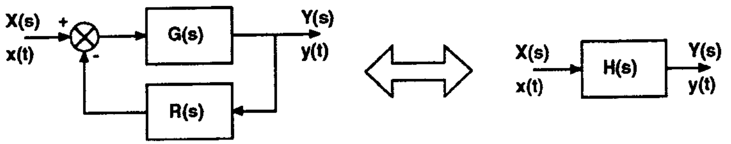
$$Q = \frac{1}{2\zeta}$$

La plupart du temps, la FT G(s) d'un système du $n^{ième}$ ordre admet n pôles distincts : des pôles réels, donnant lieu à des éléments simples du premier degré, et des pôles complexes conjugués, donnant lieu à des éléments simples du deuxième degré. G(s) peut alors être décomposée en somme d'éléments simples, chacun étant représentatif d'un sous-système. **Le système complet est donc formé par l'association additive de sous-systèmes**, les uns du 1er ordre, les autres du 2ème ordre.
Ainsi, la réponse du système est la superposition des réponses de chaque sous-système. Elle est plus fortement marquée par certains **pôles (i.e modes) dits dominants** : constantes de temps les plus élevées, amortissements les plus faibles. Il est à noter que l'instabilité d'un seul sous-système entraîne bien sûr l'instabilité de l'ensemble.



Comme on l'a déjà évoqué et ainsi qu'on le verra ultérieurement plus en détail, la commande des systèmes repose généralement sur l'utilisation de **rétroactions** ou **contre-réactions**. On est dès lors confronté à des **structures en boucle**, que l'on représente sous forme de **schémas fonctionnels** ou **schémas-blocs**, ces derniers ayant la même forme dans le domaine temporel et dans le domaine de Laplace. La FT d'un système en boucle fermée s'exprime alors en fonction des transmittances des systèmes constituant la boucle.

FT du schéma-bloc canonique :



G(s) : FT de la **ligne (chaîne) directe**
R(s) : FT de la **ligne de retour**

G(s)R(s) : FT en boucle ouverte (**FTBO**)
H(s) : FT en boucle fermée (**FTBF**)

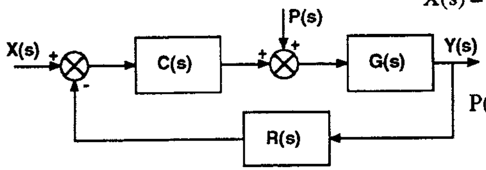
$$Y(s) = G(s)[X(s) - R(s)Y(s)] \rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)R(s)}$$

Remarques :

La FTBO et l'**équation caractéristique** du système bouclé **1 + G(s)R(s)** ont les mêmes pôles, mais des zéros différents.

Lorsque R(s) = 1, on parle de **système à retour unitaire**. Sa FTBF est donnée par : $H(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$

FT propre à une perturbation :



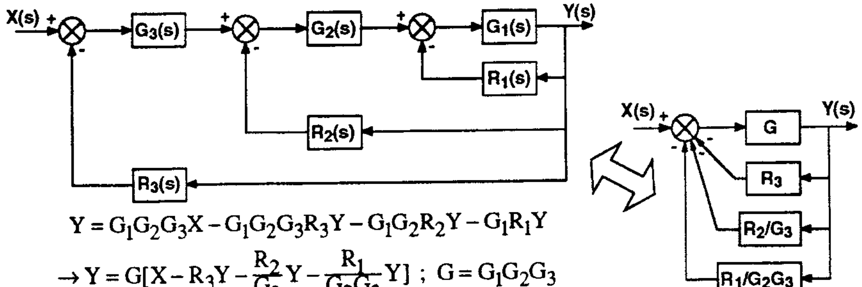
$$X(s) = 0 \rightarrow Y_p(s) = G(s)[P(s) - C(s)R(s)Y_p(s)]$$

$$\rightarrow \frac{Y_p(s)}{P(s)} = \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)R(s)}$$

$$P(s) = 0 \rightarrow Y_x(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)R(s)}X(s)$$

$$\xrightarrow{\text{linéarité}} Y(s) = Y_x(s) + Y_p(s)$$

Réduction de schémas-blocs, exemple :

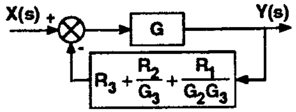


$$Y = G_1G_2G_3X - G_1G_2G_3R_3Y - G_1G_2R_2Y - G_1R_1Y$$

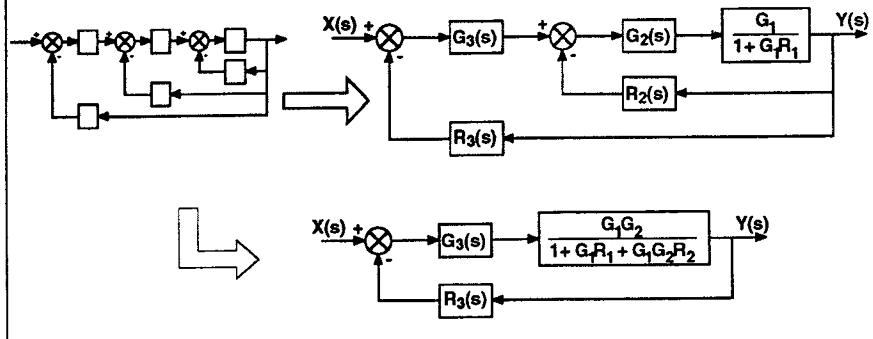
$$\rightarrow Y = G[X - R_3Y - \frac{R_2}{G_3}Y - \frac{R_1}{G_2G_3}Y] \; ; \; G = G_1G_2G_3$$

$\rightarrow Y = G[X - (R_3 + \frac{R_2}{G_3} + \frac{R_1}{G_2 G_3})Y]$

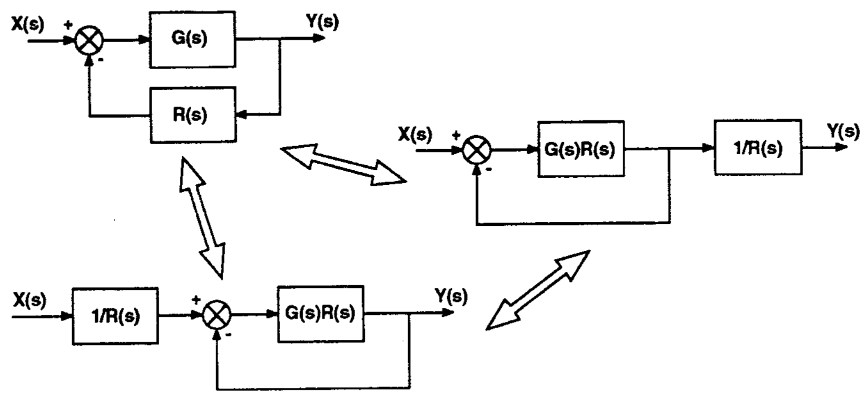
$\rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 R_3 + G_1 G_2 R_2 + G_1 R_1}$



Autre solution, élimination successive des boucles intérieures :



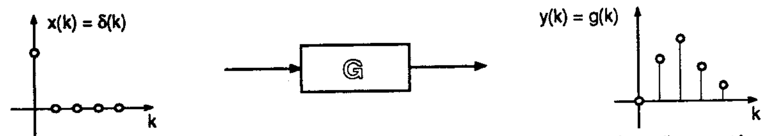
Bien que cela ne corresponde pas à la configuration réelle, il est souvent utile, à des fins d'analyse, de se ramener à un système avec retour unitaire :



De manière générale, deux schémas-blocs ne sont équivalents que s'ils obéissent à la même loi, c'est à dire s'ils ont la même transmittance.

De façon générale, on peut établir un parallèle entre les SIL continus et discrets. Ainsi, on retrouve les différentes notions, définitions et propriétés déjà exposées dans le cas continu, mais exprimées sous forme discrétisée. Les systèmes discrets qui nous intéressent au premier chef sont les **systèmes de traitement numérique.** Un système numérique établit une relation de cause à effet en agissant sur un signal numérique en entrée pour produire un autre signal numérique en sortie.

REPONSE IMPULSIONNELLE ET CONVOLUTION :



La réponse du SIL discret G à une impulsion discrète, appelée réponse impulsionnelle et notée g(k) ou g_k, le caractérise entièrement, puisque tout signal discret x(k) est une suite d'impulsions discrètes de hauteur variable et peut donc être considéré comme une **somme pondérée d'impulsions décalées** :

$$x(k)=x(k)*\delta(k)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\delta(k-n)$$

Le système étant invariant, on a : $G[\delta(k-n)]=g(k-n)$

$$\xrightarrow{\text{linéarité}}\boxed{y(k)=G[x(k)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)g(k-n)=x(k)*g(k)}$$

On montre que pour un système causal, g(k) est un signal causal, donc g(k - n) = 0 pour n > k.

D'autre part, si on se limite au cas des signaux causals, x(n) = 0 pour n < 0. On a finalement :

$$\boxed{y(k)=G[x(k)]=\sum_{n=0}^{k}x(n)g(k-n)=\sum_{n=0}^{k}g(n)x(k-n)}$$

Remarque : d'après la définition que l'on a donnée pour la stabilité, le système G précédent est BIBO stable si g(k) tend vers zéro quand k tend vers l'infini, i.e si : $\sum_{n=0}^{\infty}|g(n)|<\infty$

De même que dans le cas continu, la **réponse fréquentielle** d'un SIL discret est la **Transformée de Fourier** (périodique) **de sa réponse impulsionnelle**. On peut illustrer son rôle en exprimant la réponse du système à un signal harmonique exp(jωk) :

$$y(k)=G[e^{j\omega k}]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}g(n)e^{j\omega(k-n)}=e^{j\omega k}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}g(n)e^{-j\omega n}=e^{j\omega k}G(\omega)$$

L'interprétation est exactement la même qu'en continu, en remarquant toutefois que la réponse fréquentielle est ici périodique. D'autre part, on a immédiatement, par TF du produit de convolution discret précédent :

$$\boxed{Y(\omega)=G(\omega)X(\omega)}$$

Il est alors clair que la **réponse fréquentielle d'une cascade de systèmes discrets** est égale au **produit des réponses fréquentielles de chaque sous-système**.

La **fonction de transfert** (ou transmittance) d'un SIL à temps discret est définie comme la **Transformée en z G(z) de sa réponse impulsionnelle g(k)**. Par ailleurs, par Tz du produit de convolution discret exprimant la réponse du système à une entrée quelconque, il vient :

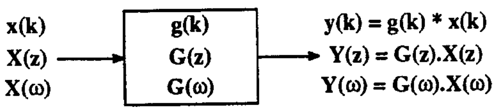
$$\boxed{Y(z)=G(z)X(z)}$$

Il en résulte en particulier que la **FT d'une cascade de systèmes discrets** est égale au **produit des FT de chaque sous-système**.

Remarques : Comme on se limite au cas causal, on utilise exclusivement la Tz monolatère. D'autre part, la réponse impulsionnelle d'un SIL discret stable étant absolument sommable, sa TF se déduit de sa Tz en posant z = exp(jω) :

$$\boxed{G(\omega)=G(z)|_{z=e^{j\omega}}}$$

Remarque : les différents modes de représentation fréquentielle vus dans le cas continu restent bien sûr utilisables pour les systèmes discrets.



En conclusion, on peut dire que le **comportement dynamique** d'un SIL discret est **entièrement caractérisé**, et ce de façon équivalente, soit par sa **réponse impulsionnelle**, soit par sa **FT en z**, soit par sa **réponse fréquentielle**.

La classe de SIL discrets qui nous intéresse est celle des **systèmes régis par une équation aux différences linéaire à coefficients constants** :

$$a_0y(k)+a_1y(k-1)+\ldots+a_ny(k-n)=b_0x(k)+b_1x(k-1)+\ldots+b_rx(k-r)$$

soit : $\boxed{\sum_{i=0}^{n}a_iy(k-i)=\sum_{i=0}^{r}b_ix(k-i)}$

Ce système, d'ordre n, est causal puisque le second membre de l'équation aux différences ne fait pas intervenir de valeurs du signal d'entrée postérieures à la valeur de sortie la plus récente (ici y(k)).

Remarque : lorsqu'on modélise sous forme discrète un système en réalité continu, l'équation aux différences est une approximation discrète de l'équation différentielle. Mais pour un système intrinsèquement discret, il s'agit d'une représentation exacte.

Avec les mêmes réserves que dans le cas continu, c'est à dire **en supposant le système initialement au repos** (et donc les conditions initiales nulles), on obtient la **FT discrète du système** en prenant la Tz des deux membres de l'équation aux différences :

$$Y(z)\left(a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-n}\right)=X(z)\left(b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_rz^{-r}\right)\rightarrow A(z)Y(z)=B(z)X(z)$$

$$\boxed{G(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_rz^{-r}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-n}}}$$

Une FT discrète est dite **réalisable** si l'équation aux différences correspondante est causale.

Ainsi, la FT précédente est **réalisable si** :
si $b_0\neq0$ alors $a_0\neq0$, si $b_0=0$, $a_0=0$ et $b_1\neq0$ alors $a_1\neq0$, etc.

Si on travaille en puissances positives de z :

$$H(z)=\frac{c_0+c_1z+\ldots+c_qz^q}{d_0+d_1z+\ldots+d_pz^p}$$

réalisable si $q\leq p$ pour $d_p\neq0$.

Le parallèle avec le cas continu se poursuit. On retrouve, avec les mêmes définitions, les notions de réponses **libre** et **forcée**, réponses **permanente** et **transitoire**, réponse indicielle, etc. La FT est caractérisée par la **position de ses pôles et zéros dans le plan en z** (NB : il s'agit bien des pôles et zéros en z et non en z^{-1}). **Ces pôles sont aussi les racines de l'équation caractéristique** du système.

Par un raisonnement similaire à celui fait en continu, on montre que les **modes** caractérisant la réponse libre du système (qui, pour une racine réelle simple z_i, sont de la forme $(z_i)^k$), tendent vers zéro, quand k tend vers l'infini, si le module des racines z_i correspondantes est inférieur à 1.

On en déduit la **condition de stabilité d'un système discret** : un SIL discret n'est stable que **si le module des pôles en z de sa fonction de transfert est inférieur à 1**, c'est à dire si **tous les pôles sont à l'intérieur du cercle de rayon 1** dans le plan en z (si on raisonne en z^{-1}, les pôles doivent être à l'extérieur). Un système avec un pôle simple en z = 1, ou une paire de pôles conjugués sur le cercle unité, est à la limite de la stabilité.

Le **gain statique** d'un système discret s'obtient **en posant z = 1 dans la FT** (ceci se démontre aisément à l'aide du théorème de la valeur finale en z).
La FT d'un système discret à **comportement intégral** présente un ou plusieurs pôles en z = 1. Inversement, un système à **comportement différentiel** est caractérisé par des zéros en z = 1.
Un système **à retard pur** se caractérise par la présence d'une puissance de z^{-1} en facteur de la FT.
Les règles régissant les **schémas-blocs de systèmes discrets bouclés** sont identiques à celles du continu.

Définit. (suite), critères de stabilité

Par rapport au cas continu, on fait une distinction supplémentaire entre **systèmes à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) et Infinie (RII)**. Un système RIF est caractérisé par une équation aux différences d'ordre zéro. En effet, en posant n = 0 dans l'équation générale précédente, il vient :

$$y(k)=\sum_{i=0}^{r}\frac{b_i}{a_0}x(k-i)$$

En considérant cette relation comme un produit de convolution, on en déduit la forme de la réponse impulsionnelle :

$$g(k)=\begin{cases} b_k/a_0 & k\le r \\ 0 & k>r \end{cases}$$

Notons au passage qu'**un système RIF est implicitement stable**. En passant en Tz, on constate par ailleurs que la FT d'un système RIF est un polynôme en z^{-1} de degré fini :

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{i=0}^{r}\frac{b_i}{a_0}z^{-i}$$

Enfin, on peut remarquer que contrairement au cas RII, la sortie d'un système RIF ne dépend pas de valeurs passées de cette sortie. Pour cette raison, les systèmes RII sont dits **récursifs** et les systèmes RIF **non-récursifs**.

CRITERES DE STABILITE : ils se basent sur l'équation caractéristique du système, de la forme :

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n$$

Critère de Routh modifié : Rappel : le critère de Routh permet de savoir si les racines d'un polynôme sont à partie réelle négative. La méthode consiste à appliquer la **transformation bilinéaire** suivante à l'équation caractéristique :

$$P(z)=0\xrightarrow{z=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}Q(\lambda)=0$$

Cette application transforme le cercle unitaire du plan en z en demi-plan gauche du plan en λ. En effet, si on pose $\lambda=\sigma+j\omega$, l'intérieur du cercle unitaire en z est caractérisé par :

$$|z|=\frac{|\lambda+1|}{|\lambda-1|}=\frac{|\sigma+j\omega+1|}{|\sigma+j\omega-1|}<1,\ \text{soit : } \frac{(\sigma+1)^2+\omega^2}{(\sigma-1)^2+\omega^2}<1,\ \text{d'où : } (\sigma+1)^2+\omega^2<(\sigma-1)^2+\omega^2,\ \text{i.e : } \sigma<0$$

Avec cette transformation, on est donc ramené à l'utilisation du critère de Routh classique.

Critères de stabilité (suite)

Résumé de la méthode : on commence par substituer à z son équivalent en λ dans l'équation caractéristique :

$$P(z)=0\rightarrow a_0\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^n+a_1\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\frac{\lambda+1}{\lambda-1}+a_n=0$$

En multipliant les 2 membres de cette équation par $(\lambda-1)^n$, il vient :

$$Q(\lambda)=b_0\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\ldots+b_{n-1}\lambda+b_n=0$$

On peut alors appliquer le critère de Routh à l'équation caractéristique transformée Q(λ).

Remarques : bien que séduisante pour ceux habitués à utiliser le critère de Routh, cette technique est plus lourde sur le plan des calculs à mener que les autres critères existants. Il faut noter, par ailleurs, que le plan en λ n'est en aucune manière équivalent au plan de Laplace, et qu'en conséquence, la stabilité relative est difficile à étudier dans le plan en λ.

Autres critères : Les autres critères disponibles sont ceux de Schur-Cohn et de Jury, eux-mêmes existant sous plusieurs formes. Lorsque l'équation caractéristique est à coefficients réels (c'est notre cas), le **critère de Jury** nécessite moins de calculs, on en présente donc une version.

	z^0	z^1	z^2	z^3	…	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	…	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3	…	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	…	b_1	b_0	
4	b_0	b_1	b_2	b_3	…	b_{n-2}	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}	…	c_0		
6	c_0	c_1	c_2	c_3	…	c_{n-2}		
⋮			⋮					
2n−5	p_3	p_2	p_1	p_0				
2n−4	p_0	p_1	p_2	p_3				
2n−3	q_2	q_1	q_0					

Il s'applique au polynôme précédent P(z), avec $a_0>0$ et consiste à construire le tableau ci-contre. Les 2 premières lignes sont constituées des coefficients de P(z), d'abord ordonnés suivant les puissances croissantes de z, puis décroissantes. Chaque ligne de n° pair est la précédente retournée. Les éléments du tableau sont calculés à partir des déterminants :

$$b_i=\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-i} \\ a_0 & a_{i+1} \end{vmatrix};\ i=0,1,2,\ldots,n-1$$

$$c_i=\begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-i} \\ b_0 & b_{i+1} \end{vmatrix};\ i=0,1,2,\ldots,n-2$$

$$\cdots \qquad q_i=\begin{vmatrix} p_3 & p_{2-i} \\ p_0 & p_{i+1} \end{vmatrix};\ i=0,1,2$$

Critères de stabilité (suite)

Propriété : le système d'équation caractéristique P(z) = 0 est stable si les conditions suivantes sont toutes vérifiées :

$$1.\ |a_n|<a_0\ ;\ 2.\ P(z=1)>0\ ;\ 3.\ (-1)^nP(z=-1)>0$$
$$4.\ |b_{n-1}|>|b_0|,\ |c_{n-2}|>|c_0|,\ \ldots,\ |q_2|>|q_0|$$

Les 3 premières conditions sont des conditions nécessaires qui peuvent utilisées avant de former le tableau.

Afin d'éviter des calculs fastidieux lors des exercices, on livre à présent les conditions de stabilité à vérifier pour les systèmes d'ordre 2 à 4 :

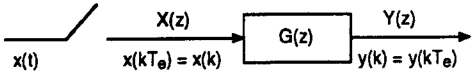
Rappel : $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n\ ;\ a_0>0$

$$n=2:\begin{cases} a_0+a_1+a_2>0 \\ a_0-a_1+a_2>0 \\ a_0-a_2>0 \end{cases}\qquad n=3:\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3>0 \\ a_0-a_1+a_2-a_3>0 \\ a_0-|a_3|>0 \\ a_1a_3-a_0a_2+a_0^2-a_3^2>0 \end{cases}$$

$$n=4:\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3+a_4>0 \\ a_0-a_1+a_2-a_3+a_4>0 \\ a_0^2-a_4^2-|a_1a_4-a_0a_3|>0 \\ (a_0-a_4)^2(a_0-a_2+a_4)-(a_1-a_3)(a_1a_4-a_0a_3)>0 \end{cases}$$

SYSTEMES 3. SYSTEMES ECHANTILLONNES

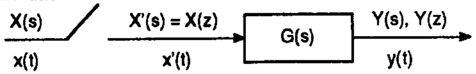
De manière générale, on parle de systèmes échantillonnés dès lors qu'un système, continu ou discret, ou un ensemble de systèmes continus et/ou discrets, est soumis à des signaux échantillonnés. Dans de tels cas, il est plus commode de raisonner entièrement du point de vue discret, bien que la discrétisation d'un système continu suppose une perte d'information. En revanche, si l'on néglige la quantification, le fonctionnement d'un système discret est inchangé :



$Y(z)=G(z)X(z)$ G(z) : FT discrète

$y(k)=g(k)*x(k)$

Dans un sens plus restreint, on désigne par système échantillonné, un système continu soumis à un signal échantillonné, c'est à dire à un train d'impulsions modulées en amplitude. Dans ce cas, la discrétisation conduit à ne plus prendre en compte ce qui se passe entre les instants d'échantillonnage.



Le système étant continu, on a :

$Y(s)=G(s).X'(s)$ et $y(t)=g(t)*x'(t)$

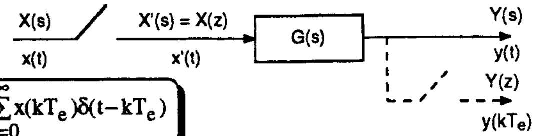
Rappel : $X'(s)=\frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(s-j\frac{2\pi n}{T_e}\right)\underbrace{\left[+\frac{1}{2}x(0^+)\right]}_{\text{si } d°D>d°N+1}=X(z)|_{z=e^{sT_e}}$

On constate que la TL de x'(t) est une périodisation de X(s) et que les TL obtenues vont être difficiles à inverser.

On pourrait être tenté, en vertu de la seconde égalité, d'utiliser la Tz pour calculer X'(s), mais là aussi, la présence de termes en $\exp(sT_e)$ rend l'inversion délicate, sauf dans des cas simples. C'est pour cette raison que l'on préfère traiter le problème d'un point de vue discret, c'est à dire que l'on se contente d'exprimer la sortie du système aux instants d'échantillonnage. Cette approche revient à rajouter un **échantillonneur fictif** synchrone sur la sortie du système et conduit à la notion de **FT échantillonnée**.

SYSTEMES 3. FT ECHANTILLONNEE

Le système continu, de FT G(s) est soumis au signal échantillonné, supposé causal, x'(t) qui peut s'exprimer de la façon suivante :



$$\boxed{x'(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(t)\delta(t-kT_e)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT_e)\delta(t-kT_e)}$$

Le système G(s), de réponse impulsionnelle g(t) causale, étant supposé invariant et linéaire, sa réponse à x'(t) est la superposition des réponses à chaque impulsion, c'est à dire la somme de réponses impulsionnelles, décalées, et modulées en amplitude par les échantillons $x(kT_e)$:

$$y(t)=\begin{cases} g(t)x(0) & 0\le t\le T_e \\ g(t)x(0)+g(t-T_e)x(T_e) & T_e\le t\le 2T_e \\ g(t)x(0)+g(t-T_e)x(T_e)+g(t-2T_e)x(2T_e) & 2T_e\le t\le 3T_e \\ \vdots & \\ g(t)x(0)+g(t-T_e)x(T_e)+\ldots+g(t-kT_e)x(kT_e) & kT_e\le t\le(k+1)T_e \end{cases}$$

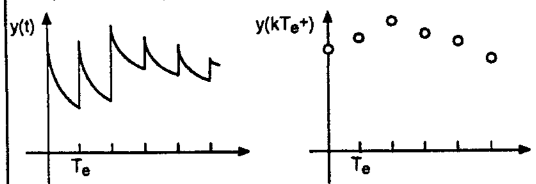
$$\boxed{\rightarrow y(t)=g(t)x(0)+g(t-T_e)x(T_e)+\ldots+g(t-kT_e)x(kT_e)=\sum_{n=0}^{k}g(t-nT_e)x(nT_e)\ ;\ 0\le t\le kT_e}$$

On en tire en particulier :

$$\boxed{\rightarrow y(kT_e)=\sum_{n=0}^{k(\infty)}g(kT_e-nT_e)x(nT_e)=\sum_{n=0}^{k(\infty)}x(kT_e-nT_e)g(nT_e)=\underbrace{x(kT_e)*g(kT_e)}_{\text{convolution discrète}}}$$

SYSTEMES 3. FT ECHANTILLONNEE (suite)

Remarque : la réponse d'un système continu à un train d'impulsions peut avoir une allure étrange. En particulier, on montre que si le d° du dénominateur de G(s) n'est supérieur que de 1 au d° du numérateur, la sortie y(t) est discontinue. Par contre, si d°D > d°N + 1, la sortie est continue. Dans le premier cas, la relation précédente donne en fait les valeurs juste après la discontinuité, c'est à dire juste après l'instant d'échantillonnage : $y(0^+)$, $y(T_e^+)$, ..., $y(kT_e^+)$. Il est dès lors clair que ces valeurs ne sont pas du tout représentatives de l'allure réelle de la sortie.



d°Dénominateur de G(s) = d°Numérateur + 1

On vient d'établir : $y(kT_e)=\sum_{n=0}^{\infty}g(kT_e-nT_e)x(nT_e)\ ;\ k=0,1,2,\ldots$ On en déduit :

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}y(kT_e)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}g(kT_e-nT_e)x(nT_e)z^{-k}=\sum_{m=-n}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}g(mT_e)x(nT_e)z^{-(m+n)}$$

$$Y(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}g(mT_e)x(nT_e)z^{-(m+n)}=\sum_{m=0}^{\infty}g(mT_e)z^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}x(nT_e)z^{-n}$$

$\boxed{\rightarrow Y(z)=G(z).X(z)}$ **G(z) FT échantillonnée**

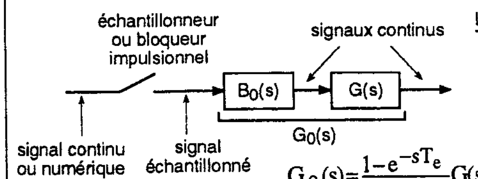
SYSTEMES 3. FT échant. : cas du B_0 en amont

Remarques :

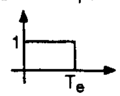
- La FT échantillonnée G(z) est la Tz de la réponse impulsionnelle g(t) : G(z) = Z[g(t)], que l'on note aussi : G(z) = Z[G(s)].
- Une FT échantillonnée a donc une forme tout à fait comparable à celle d'une FT discrète. Mais une FT échantillonnée est une représentation inexacte d'un système continu soumis à échantillonnage, alors qu'une FT discrète est une représentation exacte d'un système discret. Ainsi, l'équation aux différences associée à une FT échantillonnée correspond à une approximation discrète de l'équation différentielle qui régit le système continu.
- On a vu précédemment : Y(s) = G(s)X'(s). On en tire : Y(z) = Z[Y(s)] = Z[G(s)X'(s)] = Z[G(s)X(z)]. Or, Y(z) = G(z)X(z), d'où : $\boxed{Z[G(s)X(z)] = G(z)X(z).}$

Système échantillonné avec bloqueur d'ordre 0 en amont :

Dans la réalité, les systèmes continus ne sont jamais soumis à des trains d'impulsions, mais à des signaux reconstruits à l'aide de convertisseurs Numériques/Analogiques. On a vu précédemment (Signaux 4.56) que cette opération était modélisée par un bloqueur impulsionnel suivi d'un bloqueur d'ordre zéro. Les situations auxquelles on est confronté peuvent donc se représenter comme suit :



La **FT du bloqueur d'ordre 0** est donnée par la TL de sa réponse impulsionnelle :



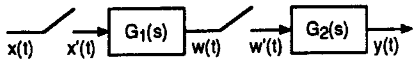
$$\boxed{\rightarrow B_0(s)=\frac{1-e^{-sT_e}}{s}}$$

$$G_0(s)=\frac{1-e^{-sT_e}}{s}G(s)\ \rightarrow\ \boxed{G_0(z)=Z[G_0(s)]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]}$$

SYSTEMES 3. FT des syst. éch. en cascade

Lors de la mise en série de systèmes échantillonnés, on doit respecter certaines règles qui n'existent pas en continu ou en discret. En particulier, on doit tenir compte de la présence ou non d'échantillonneurs.

Systèmes continus en série, avec un échantillonneur à l'entrée de chaque système :



D'après ce qui précède, on a :

$$Y(z)=G_2(z)W'(z)=G_2(z)W(z)$$

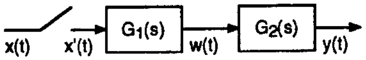
D'autre part : $W(z)=G_1(z)X'(z)=G_1(z)X(z) \rightarrow \boxed{Y(z)=\underbrace{G_2(z)G_1(z)}_{G(z)}X(z)}$

Remarque : on peut tout de même exprimer la TL de la sortie :

$$Y(s)=G_2(s)W'(s) \text{ or } W'(s)=W(z)|_{z=e^{sT_e}}=Z[G_1(s)X'(s)]|_{z=e^{sT_e}} \overset{\Delta}{=} [G_1(s)X'(s)]'=G'_1(s)X'(s)$$

finalement : $Y(s)=G_2(s)G'_1(s)X'(s)=G_2(s).G_1(z)|_{z=e^{sT_e}}.X(z)|_{z=e^{sT_e}}$

Systèmes continus en série, avec un seul échantillonneur à l'entrée du 1er système :



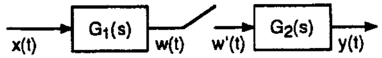
C'est le cas déjà vu avec le bloqueur d'ordre 0.

$$Y(s)=G_2(s)W(s)=G_2(s)G_1(s)X'(s)=G(s)X'(s)$$

$$\boxed{\rightarrow Y(z)=Z[Y(s)]=Z[G(s)X'(s)]=G(z)X(z) \text{ avec } G(z)=Z[G_1(s)G_2(s)]}$$

SYSTEMES 3. FT syst. éch. en cascade / bouclés

Systèmes continus en série, avec un seul échantillonneur à l'entrée du 2ème système :

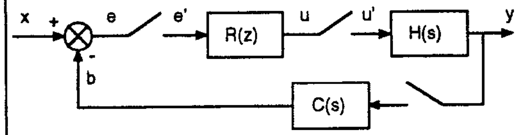


Dans ce cas, il n'est pas possible d'établir une FT entre Y et X :

$$Y(z)=G_2(z)W(z)=G_2(z).Z[G_1(s)X(s)]$$

D'autre part, on a en TL : $Y(s)=G_2(s)W'(s)=G_2(s).[G_1(s)X(s)]'=G_2(s).Z[G_1(s)X(s)]|_{z=e^{sT_e}}$

Systèmes échantillonnés bouclés : les mêmes précautions doivent être prises lors du calcul de FT échantillonnées de systèmes en boucle. **Exemples :**



$$Y(z)=H(z)R(z)[X(z)-B(z)]$$

$$Y(z)=H(z)R(z)[X(z)-C(z)Y(z)]$$

$$\boxed{\rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{H(z)R(z)}{1+H(z)R(z)C(z)}}$$

D'autre part, en TL : $Y(s)=H(s)U'(s)=H(s)R'(s)E'(s)$ or $E(s)=X(s)-B(s)$ et $B(s)=C(s)H'(s)U'(s)$

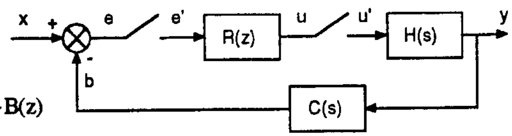
$$\rightarrow E(s)=X(s)-C(s)H'(s)U'(s) \text{ et } E'(s)=X'(s)-C'(s)H'(s)U'(s)=U'(s)/R'(s)$$

on en tire : $U'(s)=\dfrac{R'(s)X'(s)}{1+C'(s)H'(s)R'(s)} \rightarrow \boxed{Y(s)=\dfrac{H(s)R'(s)X'(s)}{1+R'(s)C'(s)H'(s)}=\dfrac{H(s)\overline{R}(z)\overline{X}(z)}{1+\overline{R}(z)\overline{C}(z)\overline{H}(z)}}$

en notant : $\overline{X}(z)\overset{\Delta}{=}X(z)|_{z=e^{sT_e}}$

SYSTEMES 3. FT des syst. éch. bouclés (suite)

On modifie légèrement l'exemple précédent en supprimant l'échantillonneur dans la boucle de retour. On a alors :



$Y(z)=R(z)H(z)E(z)$ avec $E(z)=X(z)-B(z)$

mais $B(z)=Z[C(s)H(s)]U(z)=Z[CH]R(z)E(z) \rightarrow E(z)=X(z)-R(z)E(z)Z[CH]$

d'où $E(z)=\dfrac{X(z)}{1+R(z)Z[CH]} \rightarrow \boxed{\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{H(z)R(z)}{1+R(z)Z[CH]}}$

En TL, on peut écrire : $Y(s)=H(s)U'(s)=H(s)R'(s)E'(s)$

$$E(s)=X(s)-B(s)=X(s)-C(s)H(s)U'(s) \rightarrow E'(s)=X'(s)-[CH]'U'(s)$$

$$\rightarrow U'(s)=R'(s)(X'(s)-[CH]'U'(s)) \rightarrow U'(s)=\frac{R'(s)X'(s)}{1+R'(s)[CH]'}$$

finalement : $\boxed{Y(s)=\dfrac{H(s)R'(s)X'(s)}{1+R'(s)[CH]'}=\dfrac{H(s)\overline{R}(z)\overline{X}(z)}{1+\overline{R}(z)\overline{Z}[CH]}}$

SYSTEMES 3. Stabilité des syst. éch. / Remarque

Stabilité :

D'emblée, on peut noter que la stabilité d'un système étant indépendante de l'entrée, étudier la stabilité d'un système continu, soumis à échantillonnage, revient à étudier la stabilité du système continu. Mais, on peut se demander comment s'exprime la condition de stabilité en fonction de la FT échantillonnée. Soit une FT G(s) quelconque. Si l'on suppose, pour simplifier, qu'elle ne comporte que des pôles distincts notés s_i, elle peut être décomposée en éléments simples selon :

$$G(s)=\sum_i \frac{\alpha_i}{s-s_i} \quad \text{Or : } Z\left[\frac{1}{s-s_i}\right]=\frac{z}{z-e^{s_iT_e}} \rightarrow G(z)=\sum_i \frac{\alpha_i z}{z-e^{s_iT_e}} \qquad \boxed{z_i=e^{s_iT_e}}$$

Ainsi, les pôles en z de la FT échantillonnée sont donnés par :

$$s_i=\sigma_i+j\omega_i \rightarrow z_i=e^{\sigma_iT_e}.e^{j\omega_iT_e} \rightarrow |z_i|=|e^{\sigma_iT_e}|$$

Si G(s) est stable, $\sigma_i<0$ $\boxed{\rightarrow |z_i|=|e^{\sigma_iT_e}|<e^0=1}$

Par conséquent, **la FT échantillonnée est stable si le module de ses pôles en z est inférieur à 1.** La condition de stabilité est la même que dans le cas discret, et on peut donc utiliser les critères vus précédemment. Par ailleurs, on montre que l'adjonction d'un bloqueur d'ordre 0 ne modifie pas les pôles de la FT.

Remarque :

On peut montrer que les systèmes échantillonnés (qui sont en fait des systèmes "périodiques") ne sont, en toute rigueur, ni linéaires (ne serait-ce qu'en raison de la quantification), ni invariants. La non-linéarité due à la quantification peut généralement être négligée (sauf lors de l'apparition de **cycles limites**). Le comportement variant dans le temps peut également être négligé, pourvu que la période d'échantillonnage soit suffisamment petite. D'autres manifestations non-linéaires, dues au phénomène d'échantillonnage et de repliement spectral, ne peuvent être négligées, et doivent être évitées à l'aide de filtres anti-repliement.