

signal : manifestation, sous forme d'une grandeur physiquement observable, d'un phénomène quelconque (température, pression, position d'un mobile, onde acoustique, optique, tension électrique, etc.). Le plus souvent, les signaux analogiques sont de nature électrique.

modèle d'un signal : (qu'on confond avec le signal lui-même) fonction, réelle ou complexe, à une ou plusieurs dimensions, d'une ou plusieurs variables réelles ou entières.

signal scalaire : signal à une dimension

Un signal à plusieurs dimensions est dit vectoriel (ex.: 3 composantes en coordonnées cartésiennes d'un champ électrique en fonction du temps, traitement d'antenne : une dimension par capteur)

signal monodimensionnel (1D) : signal fonction d'une seule variable réelle ou entière

Exemple de signal 2D : image fixe (x,y) . Une image animée (x,y,t) est un signal 3D dit spatio-temporel

signal temporel : fonction du temps (c'est le cas le plus fréquent)

Il existe également des signaux spatiaux (distance, angle)

On s'intéresse essentiellement aux signaux scalaires temporels.

signal continu (ou analogique) :
signal à temps continu noté :
 $x(t)$

signal discret (ou numérique) :
signal à temps discret noté :
 $x(k)$

Introduction

M. Tomczak - esal

bruit : perturbation (interférence, parasite, bruit de fond, etc.) ≠ signal utile gênant la perception ou l'interprétation d'un signal.

En général, il s'agit d'une fluctuation imprévisible due à l'environnement

ex.: bruit thermique : agitation des électrons dans une résistance, variation quantifiée du nombre de photons arrivant sur un détecteur optique.

Dans la réalité physique, il y a toujours du bruit !

rapport signal sur bruit (RSB) : mesure du degré de contamination du signal par du bruit

Il s'exprime par le rapport des puissances respectives du signal P_s et du bruit P_b :

$$RSB = \frac{P_s}{P_b} ; \quad RSB_{dB} = 10 \log_{10} RSB.$$

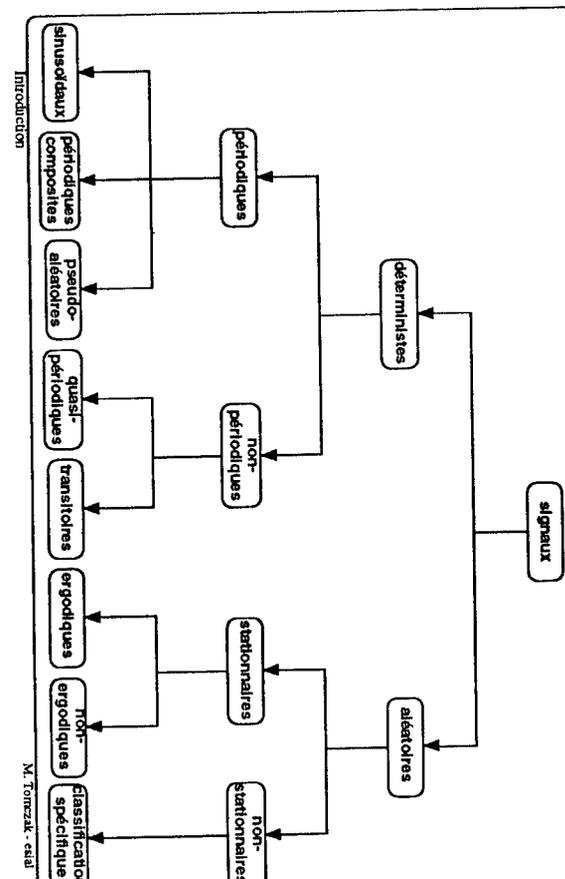
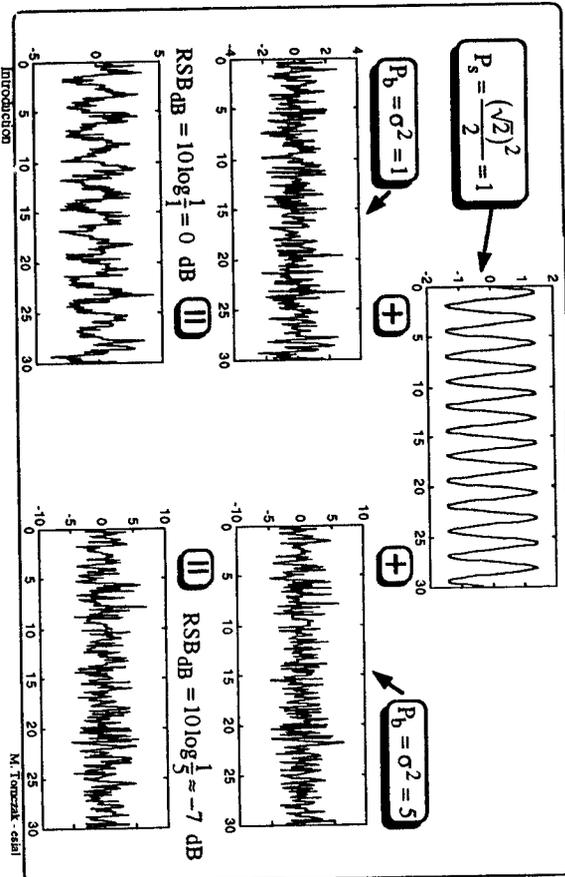
La frontière entre signal et bruit est artificielle et dépend des critères propres de l'utilisateur.

Ainsi, le bruit galactique (phénomènes électromagnétiques d'origine galactique), bruit pour les ingénieurs de télécom., est un signal du plus haut intérêt pour les radio-astronomes.

Exemple : considérons le cas d'un signal constitué d'une sinusoïde pure à laquelle se superpose un bruit. Il s'agit ici d'un bruit particulier dit **bruit blanc gaussien**, de moyenne nulle. Un tel bruit, qui, comme son nom l'indique, a la particularité d'occuper uniformément toute la gamme de fréquence, a une puissance égale à sa variance, notée σ^2 (la variance correspond au carré de l'écart-type du bruit, qui est une mesure de sa dispersion autour de la moyenne). D'autre part, on verra plus tard que la puissance d'une sinusoïde est égale à la moitié du carré de son amplitude.

Introduction

M. Tomczak - esal



Introduction

M. Tomczak - esal

signal déterministe : dont l'évolution temporelle peut être parfaitement décrite, donc prédite, par un modèle mathématique approprié.
 On les rencontre essentiellement en laboratoire : signaux de test et d'excitation, signaux d'échantonnage, etc.

signal aléatoire : imprévisible, qu'on ne peut prévoir qu'avec une marge d'incertitude. C'est le cas de la plupart des signaux d'origine physique. Ils sont décrits par leurs propriétés moyennes. L'étude des systèmes parcourus par des signaux aléatoires doit s'effectuer à l'aide de méthodes statistiques.

exemple classique de signal aléatoire : le bruit.
 Un signal déterministe auquel se superpose un bruit constitue un signal aléatoire. Lorsque le RSB est suffisamment élevé, on peut raisonnablement négliger l'effet du bruit, par exemple lors de l'étude d'un système parcouru par un tel signal.

La dichotomie déterministe / aléatoire n'apparaît pas toujours de façon évidente.
 ex.: sinusôides à amplitude, phase ou fréquence aléatoires, signaux chaotiques déterministes.

Signal stationnaire : dont les caractéristiques statistiques sont invariantes dans le temps.
 Un signal non-stationnaire ne vérifie pas cette propriété.

Signal ergodique : dont les caractéristiques statistiques peuvent être estimées dans le temps. Par exemple, si la valeur moyenne d'un signal aléatoire (qui devrait être calculée sur plusieurs réalisations) correspond à la moyenne temporelle d'une seule réalisation.

Si l'hypothèse d'ergodicité est couramment admise, il n'en va pas de même pour la stationnarité.
 Toutefois, en pratique, la plupart des signaux peuvent être considérés comme stationnaires pendant une durée d'observation suffisamment courte.

Introduction

M. Tomczak - casal

signal périodique : qui obéit à une loi de répétition cyclique régulière.

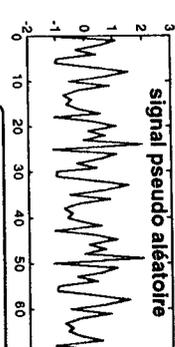
$x(t) = x(t + nT)$; n entier
 signal continu de période T

$x(k) = x(k + K)$
 signal discret de période K

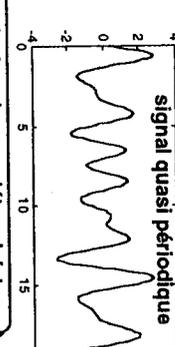
signal pseudo aléatoire : signal périodique, de période grande par rapport à la durée d'observation, dont le comportement sur une période rappelle celui d'un signal aléatoire, tant sur le plan statistique que fréquentiel.
 De tels signaux sont utilisés pour simuler des phénomènes aléatoires (simulation de systèmes de communication, identification de systèmes, etc.).

signal quasi périodique : somme de signaux périodiques de périodes incommensurables. La somme de 2 signaux périodiques, de périodes différentes, n'est périodique que si le rapport des périodes est un nombre rationnel.

signal transitoire : signal à durée limitée.
 NB : un signal de type exponentielle amortie est considéré comme transitoire.



signal pseudo aléatoire



signal quasi périodique

Dans la suite, on se limite à l'étude des signaux déterministes.

Introduction

M. Tomczak - casal

Initialement, les notions d'énergie et de puissance moyenne d'un signal ont été définies pour les signaux analogiques.
 Dans ce cas, celles-ci correspondent à une réalité physique. Par analogie, on les définit également dans le cas discret.

CONTINU

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

DISCRET

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2$$

↑

ENERGIE

↓

↑

PUISSANCE MOYENNE

↓

CONTINU

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

DISCRET

$$P_x = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2}^{K/2} |x(k)|^2$$

Interprétation physique :
 Si le signal est une tension électrique, il s'agit, à une constante multiplicative près, de l'énergie ou de la puissance moyenne consommée dans une résistance.

On distingue alors :

- les signaux à énergie finie (on a alors $P_x = 0$) :** tous les transitoires, déterministes ou aléatoires. C'est le cas de tous les signaux de la réalité physique.
- les signaux à puissance moyenne finie non-nulle (on a alors $E_x = \infty$) :** tous les signaux permanents, déterministes (périodiques et quasi périodiques) ou aléatoires. C'est le cas de certains signaux théoriques, utiles pour analyser ou modéliser.

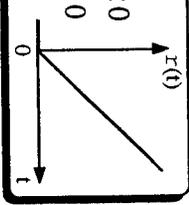
Certaines signaux théoriques n'appartiennent à aucune de ces catégories.
 Ex.: $x(t) = \exp(at)$ pour $-\infty < t < \infty$, impulsion de Dirac $\delta(t)$, péage de Dirac, ...

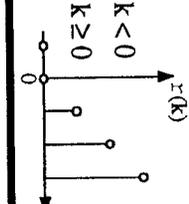
Introduction

M. Tomczak - casal

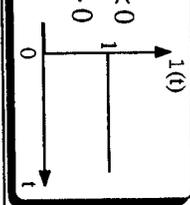
Il s'agit de quelques signaux particuliers, utiles pour :
 modéliser certains comportements, analyser le fonctionnement d'un système ou comparer les fonctionnements de plusieurs systèmes.
 On les rencontre fréquemment dans la réalité physique, mais de plus ils peuvent être utilisés comme des "briques" de base pour construire de nombreux autres signaux.

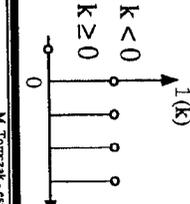
La rampe unitaire

$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$


$r(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0 \\ k & \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$


L'échelon unitaire

$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$


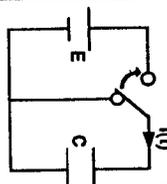
$1(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0 \\ 1 & \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$


Introduction

M. Tomczak - casal

L'échelon $1(t)$ est la dérivée (discontinue à l'origine) de $t(t)$; il n'est pas défini pour $t = 0$.
 En fait, on a $1(0^-) = 1$ et $1(0^+) = 0$, mais par convention, on pose généralement $1(0) = 1$.
 Physiquement, la variation brusque à l'origine correspond, pour un système, à un changement de consigne rapide (par rapport au plus petit temps caractéristique du système).

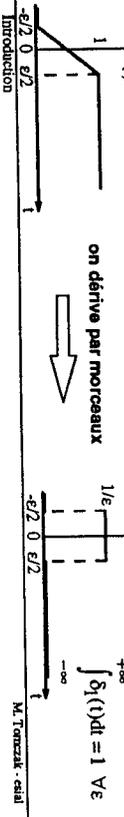
EXEMPLE
 Circuit sans résistance $\lambda = 0$, on bascule l'interrupteur : $v(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E_0 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$
 à $t = 0$, $v(t)$ est indéfini. De plus, le courant $i(t) = C \frac{dv}{dt}$ est nul tout le temps, sauf pour $t = 0$ où on ne sait pas le calculer. Pourtant, il y a bien eu transfert de la charge $q = CE$ de la batterie au condensateur !
 Comme $i(t) = \frac{dq}{dt}$, on peut envisager la valeur de la charge déposée sur le condensateur comme l'intégrale de l'intensité : $q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) dt = CE$



L'intégrale de la fonction $i(t)$, nulle presque partout, n'est pas nulle

$\Rightarrow i(t)$ n'est pas une fonction mais une distribution (L. Schwartz, années 50).

On peut essayer d'exprimer la durée finie de fermeture de l'interrupteur e et la continuité de l'évolution de la tension par $\Delta t(t)$:



Si on fait tendre ε vers zéro, $\delta_\varepsilon(t)$ ne tend pas vers une limite au sens des fonctions, mais au sens des distributions :

C'est la distribution de Dirac, notée $\delta(t)$ et appelée aussi :

Remarque : on peut imaginer d'autres formes de $\delta(t)$, qui conduisent à diverses formes de $\delta(t)$.
 Ex: impulsion triangulaire de base 2ε et de hauteur $1/\varepsilon$.

Toutes vérifiant : $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

Au sens des distributions, on a également : $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} = 1'(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} \delta(t-\tau) d\tau$

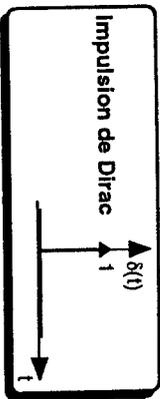
L'intégrale n'a, plus de signification au sens de Riemann puisque $\delta(t)$ est un être à valeur infinie en un point et nulle ailleurs. On la représente par une flèche ou un trait d'amplitude égale à 1 (ici 1).

Ainsi, dans l'exemple précédent :

$v(t) = E \cdot 1(t)$ et $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = CE \cdot \delta(t)$

Physiquement, l'impulsion de Dirac est donc une idéalisation de certains phénomènes tels que l'impulsion électrique qui apparaît lors de la mise en court-circuit d'un condensateur, les forces engendrées lors d'un choc élastique entre deux corps rigides (percussion) ou encore une masse filée concentrée en un point (où la densité est infinie).

On démontre qu'une impulsion brève, de forme quelconque, peut être approchée, du point de vue de ses effets, par une impulsion de Dirac "d'amplitude" (de mesure) égale à son aire. Pour un système, $\delta(t)$ représente une impulsion quelconque de durée petite par rapport au plus petit temps caractéristique, et contenant assez d'énergie pour "l'ébranler".



L'impulsion unitaire discrète

$\delta(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq 0 \\ 1 & \text{pour } k = 0 \end{cases}$



On a les relations : $\delta(k) = \Delta 1(k) = 1(k) - 1(k-1)$
 et $1(k) = \sum_{n=0}^k \delta(n) = \sum_{n=-\infty}^k \delta(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(k-n)$
 On peut établir un parallèle entre les opérateurs Δ et \sum d'une part, et \sum d'autre part.

Signal exponentiel complexe

$x(k) = Ce^{\alpha k}$; C, α complexes

Si C et α sont réels :
 si $\alpha > 0$, on a une exponentielle croissante (modèles de réactions en chaîne, populations bactériologiques, réactions chimiques, etc.)
 si $\alpha < 0$, on a une exponentielle décroissante (circuits RC, systèmes mécaniques amortis, etc.)

$x(k) = Ce^{\beta k} = C\alpha^k$; C, α complexes

Si C et α sont réels :
 si $|\alpha| > 1$, on a une exponentielle croissante (modèles de populations en fonction des générations, retour sur investissement journalier, mensuel, etc.)
 si $|\alpha| < 1$, on a une exponentielle décroissante (discretisation de systèmes continus, etc.)
 Si $\alpha > 0$, le signal est de signe constant, mais, si $\alpha < 0$, alors 2 valeurs successives sont de signe opposé.

Cas particulier : le signal harmonique (lorsque α , ou β dans le cas discret, sont imaginaires purs)

Intérêt : exploration fréquentielle des systèmes (en faisant varier ω_0)
 écriture plus commode sur le plan mathématique, des signaux sinusoïdaux

$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$
 $A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} (e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} + e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 t}) = ASR \{ e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \}$

$e^{j\omega_0 k} = \cos \omega_0 k + j \sin \omega_0 k$
 $A \cos(\omega_0 k + \varphi) = \frac{A}{2} (e^{j\varphi} e^{j\omega_0 k} + e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 k}) = ASR \{ e^{j(\omega_0 k + \varphi)} \}$

En continu, le signal harmonique (comme les signaux sinusoïdaux) est périodique :

$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 \left(t + \frac{2\pi}{\omega_0} \right)}$ $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Il est caractérisé de façon équivalente par sa pulsation ω_0 (radians/seconde), sa fréquence f_0 (Hertz), ou sa période T_0 (secondes)

Dans le cas discret : $e^{j\omega_0 k} = e^{j\omega_0(k+K)} \Rightarrow e^{j\omega_0 K} = 1 \Rightarrow \exists m \text{ entier} / \omega_0 K = 2\pi m$ i.e. $f_0 = \frac{m}{K}$
 Un signal harmonique (ou sinusoïdal) discret n'est périodique que si sa fréquence est rationnelle.

De plus, on a la propriété suivante :
 Un même signal harmonique discret a une infinité de pulsations : la fréquence des oscillations ne croît pas continuellement avec ω_0 .

Signal causal

Lors de l'étude du comportement transitoire des systèmes, intervenient des signaux qui peuvent être considérés comme nuls pour $t < 0$ (l'instant auquel se produit l'événement est pris pour origine des temps).

L'échelon permet d'écrire ceci de façon condensée :

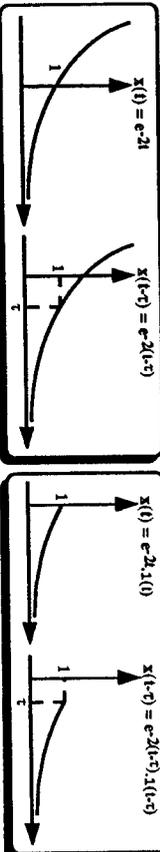
Exemple :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ Ce^{at} & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

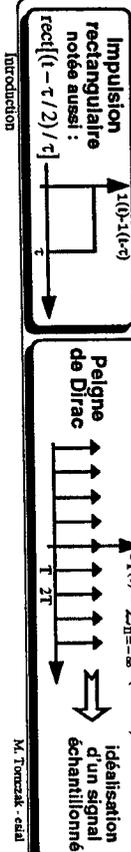
$$x(t) = Ce^{at} \cdot 1(t)$$

Signal décalé ou translaté (retardé ou avancé)

Le signal $y(t) = x(t - \tau)$ (resp. $y(k) = x(k - n)$) est une version retardée de τ (resp. de n) du signal $x(t)$ (resp. $x(k)$). Au contraire, le signal $y(t) = x(t + \tau)$ (resp. $y(k) = x(k + n)$) est une version avancée de τ (resp. de n) du signal $x(t)$ (resp. $x(k)$). Exemples :



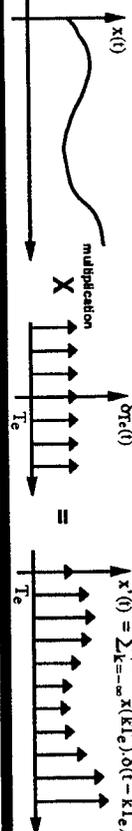
Le fait de sommer des signaux causaux et/ou retardés ou avancés permet de créer des signaux de formes quelconques. Exemples :



M. Tomczak - esal

Signal échantillonné (échantillonnage idéal)

Un signal échantillonné résulte du produit d'un signal continu par un peigne de Dirac. La période du peigne est appelée période d'échantillonnage et notée T_e . On obtient alors un train d'impulsions modulées en amplitude par les valeurs du signal continu aux instants kT_e , dits "instants d'échantillonnage". Dans la réalité, les impulsions sont de durée petite par rapport à T_e .



Produit de convolution

On appelle produit de convolution (continu ou discret suivant le cas) de deux signaux :

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$y(k) = x(k) * g(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)g(k-n)$$

L'opérateur de convolution est d'une importance capitale pour l'analyse des signaux et systèmes. On rencontre souvent des convolutions effectuées sur un horizon fini 0 à 1 (ou k) instant courant, celles-ci conservent les mêmes propriétés (cas des signaux et systèmes causaux).

commutativité $x * g = g * x$

associativité $(x * g_1) * g_2 = x * (g_1 * g_2)$

distributivité $(g_1 + g_2) * x = (g_1 * x) + (g_2 * x)$

Introduction

M. Tomczak - esal

Distributions

L'impulsion de Dirac est définie rigoureusement par la théorie des distributions. Celle-ci permet d'étendre le calcul intégral aux impulsions. Ainsi, on utilise les mêmes notations que pour les fonctions, mais l'utilisation aveugle du calcul intégral classique peut conduire à des résultats erronés. Sans vouloir entrer dans les détails de la théorie, voici les principaux résultats qui nous seront utiles :

L'impulsion de Dirac retardée $\delta(t-\tau)$ est définie par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau) ; f \in C_{\infty}$$

$$\text{Soit, pour } \tau = 0 : \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = \langle f, \delta \rangle = f(0)$$

Produit par une fonction : $\langle g\delta, f \rangle = \langle \delta, gf \rangle$

En particulier :

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \text{ et } x(t)\delta(t-\tau) = x(\tau)\delta(t-\tau)$$

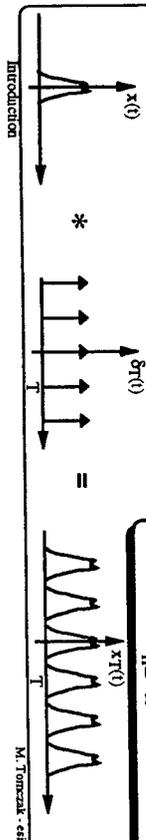
Convolution :

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \quad x(t) * \delta(t-\tau) = x(t-\tau)$$

$$x(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2)$$

Périodisation :

$$x(t) * \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT) = x_T(t)$$



M. Tomczak - esal

Changement de variable :

$$\delta(at) = |a|^{-1} \delta(t)$$

En particulier :

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \delta(f)$$

Dérivation :

$$(\delta f) = \delta f + f\delta$$

$$\langle \delta, f \rangle = - \langle \delta, f' \rangle = -f'(0)$$

$$\langle \delta^{(n)}, f \rangle = (-1)^n \langle \delta, f^{(n)} \rangle$$

$$(\delta * f) = \delta * f = \delta * f$$

De plus, on verra, dans la suite, que la transformée de Fourier peut être étendue au cas des distributions.

Introduction

M. Tomczak - esal

SIGNAUX

1.

1. T. de Fourier, spectre, corrél.

17

La transformée de Fourier est l'outil permettant de effectuer une des opérations majeures de la théorie du signal :

Analyse harmonique. \longleftrightarrow **Représentation spectrale des signaux**

Repartition fréquentielle de l'amplitude, de la phase, de l'énergie ou de la puissance des signaux

En vertu du théorème de Plancherel, tous les signaux à énergie finie (signaux de carré intégrable) possèdent une transformée de Fourier, elle-même de carré intégrable. Toutefois cette condition est suffisante mais pas nécessaire. Ainsi, la plupart des signaux idéalisés (à puissance moyenne finie, distributions, ...) ont également une transformée de Fourier.

Soit $x(t)$ un signal continu déterministe, sa transformée de Fourier est une fonction, généralement complexe, de la variable réelle f (ou ω) :

$$X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad x(t) = F^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df$$

On utilise aussi : $X(\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt \quad x(t) = F^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$

La symétrie des transformations directe et inverse montre l'existence d'une **dualité temps / fréquence**

Transformées de Fourier, Spectre, Corrélation

M. Tomazak - ced

SIGNAUX

1.

Dévt en SERIE DE FOURIER

19

Si on souhaite approcher $x(t)$ sur $[t_1, t_2]$ par : $\sum_{i=1}^n C_i f_i(t)$, avec $\{f_i(t)\}$ orthogonales, i.e. $\langle f_i, f_j \rangle = 0 \forall i \neq j$

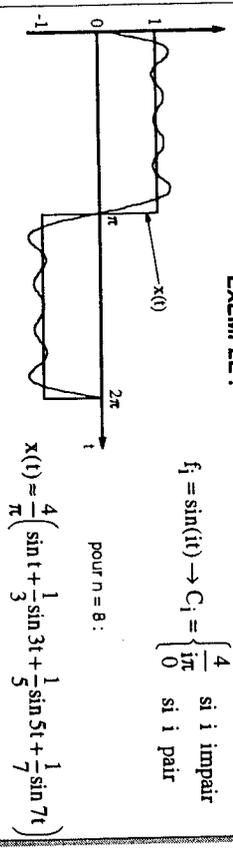
$$\epsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{i=1}^n C_i f_i(t) \right]^2 dt \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial C_i} = \frac{2}{t_2 - t_1} \left[C_i \int_{t_1}^{t_2} f_i^2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} x(t) f_i(t) dt \right]$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial C_i^2} = \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_i^2(t) dt \geq 0 \quad x(t) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, f_i \rangle}{\|f_i\|^2} \cdot f_i(t)$$

EXEMPLE :

$$f_i = \sin(i\pi t) \rightarrow C_i = \begin{cases} 4 & \text{si } i \text{ impair} \\ 0 & \text{si } i \text{ pair} \end{cases}$$

pour $n = 8$:



$$x(t) \approx \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \frac{1}{7} \sin 7t \right)$$

Transformées de Fourier, Spectre, Corrélation

M. Tomazak - ced

SIGNAUX

1.

Dévt en SERIE DE FOURIER

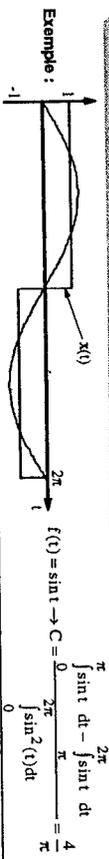
18

Solent deux fonctions continues sur $[t_1, t_2]$ $x(t)$ et $f(t)$, on cherche une approximation de $x(t)$ par $f(t)$. Autrement dit, on cherche le scalaire C tel que $x(t) = C \cdot f(t)$ sur $[t_1, t_2]$, par exemple au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne :

$$\epsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - C f(t)]^2 dt \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial C} = \frac{2}{t_2 - t_1} \left[C \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} x(t) f(t) dt \right]$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial C^2} = \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt (\geq 0) \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial C} = 0, \text{ c'est à dire : } \epsilon \text{ est minimum pour}$$

si $x(t)$ et $f(t)$ sont de carré intégrable sur $I = [t_1, t_2]$, le produit scalaire associé est : $\langle x, f \rangle = \frac{1}{I} \int_{t_1}^{t_2} x(t) f(t) dt$ et $\|f\|^2 = \frac{1}{I} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt$ soit $C = \frac{\langle x, f \rangle}{\|f\|^2}$.



Exemple : $f(t) = \sin t \rightarrow C = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt} = \frac{4}{\pi}$

Transformées de Fourier, Spectre, Corrélation

M. Tomazak - ced

SIGNAUX

1.

Dévt en SERIE DE FOURIER

20

Supposons que le signal à approcher $x_T(t)$ ait une période T (celui-ci peut être obtenu par périodisation d'un signal non périodique $x(t)$ à support borné). Supposons de plus que l'ensemble des fonctions orthogonales soit complet et constitué de :

L'intervalle I est alors quelconque, de largeur T ; en général, on choisit $I = [-T/2, T/2]$. D'après ce qui précède, il vient alors :

$$\|f_i\|^2 = \frac{T}{2} \quad (i \neq 0) \quad x_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_I x_T(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt ; b_n = \frac{2}{T} \int_I x_T(t) \sin n \frac{2\pi}{T} t dt \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_I x_T(t) dt ; b_0 = 0.$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \quad \text{avec } C_n = \frac{1}{T} \int_I x_T(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt$$

Développement en série de Fourier Coefficients de Fourier

Bien sûr, le signal à support borné $[0, T]$ (transitoire) $x(t)$ peut être approché par la série de Fourier sur cet intervalle. La série de Fourier constitue un moyen d'analyse préférentiel. Elle permet d'obtenir une représentation fréquentielle discrète (spectre de raies) du signal, où chaque composante harmonique (raie) C_n est localisée à une fréquence $f_n = n f_0 = n/T$.

Transformées de Fourier, Spectre, Corrélation

M. Tomazak - ced

Autre interprétation : relation de Parseval. On montre aisément :

$$P_{x_T} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2$$

Ceci exprime le fait que la puissance moyenne de $x_T(t)$ est fournie par la somme des carrés de l'amplitude de toutes les raies (tous les harmoniques) du spectre.

Cas des signaux discrets : on peut faire un raisonnement tout à fait similaire à celui fait en continu. On considère donc un signal discret $x(k)$ K-périodique. Soit la propriété suivante :

$$K-1 \int_{-K/2}^{K/2} e^{jn\frac{2\pi}{K}k} = \begin{cases} K & \text{si } n = 0, \pm K, \pm 2K, \dots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Celle-ci se démontre aisément, en effet, on sait :

$$\sum_{k=0}^{K-1} \alpha^k = \begin{cases} K, & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^K}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Or, dans le cas présent, on a $\alpha^k = 1$. D'autre part, comme chaque exponentielle complexe de la somme est K-périodique (voir transp. 1.12 précédent), on peut sommer sur toute intervalle de longueur K. Considérons, à présent, la relation :

$$x_K(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{K}k}$$

En multipliant chaque membre de cette dernière relation par $\exp(-jm\frac{2\pi}{K}k)$ et en sommant sur K valeurs successives de k, il vient :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_K(k) e^{-jm\frac{2\pi}{K}k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{K}k} e^{-jm\frac{2\pi}{K}k}$$

Transformées de Fourier, Spectre, Corrélation

Ceci s'écrit également :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_K(k) e^{-jm\frac{2\pi}{K}k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jn\frac{2\pi}{K}k} e^{-jm\frac{2\pi}{K}k}$$

D'après la propriété démontrée précédemment, la somme sur k du second membre est nulle sauf si n - m est un multiple de K ou nul. Si on choisit m sur le même intervalle <k> que n, la seule valeur de n qui correspondra au cas non-nul, sera n = m. Donc, finalement :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_K(k) e^{-jm\frac{2\pi}{K}k} = K c_m \quad (= K c_{m \pm K} = K c_{m \pm 2K} = \dots)$$

On en déduit, en définitive :

$$x_K(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{K}k} \quad \text{avec } c_n = \frac{1}{K} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_K(k) e^{-jn\frac{2\pi}{K}k}$$

L'interprétation spectrale est la même qu'en continu. Toutefois, une différence notable tient au fait qu'un nombre fini de coefficients suffit ici à décrire le signal. En effet, ceux-ci se répètent **périodiquement** : $c_n = c_{n+K}$. On note au passage cette autre manifestation de la dualité temps/fréquence : signal périodique => spectre discret, signal discret => spectre périodique.

Transformées de Fourier, Spectre, Corrélation

On a vu comment obtenir une représentation fréquentielle d'un signal déterministe transitoire ou bien périodique. On cherche à présent à généraliser ce concept aux signaux déterministes non-périodiques et permanents. Pour cela, on les considère comme périodiques de période tendant vers l'infini.

Soit $x(t)$ un signal quelconque et $x_T(t)$ la partie de $x(t)$ comprise dans l'intervalle $]-T/2, T/2[$, on a alors :

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \quad \text{avec } X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt$$

On en déduit :

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t') e^{-jn\frac{2\pi}{T}t'} dt' \right) e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

Dans le spectre de raies de $x_T(t)$, la distance entre raies adjacentes est égale à $f_0 = 1/T$. Lorsque T augmente, la densité des raies spectrales augmente. Lors du passage à la limite, la distance entre raies devient infinitésimale et le nombre de composantes dans un intervalle de fréquence donné devient infini :

$$f_0 = 1/T \rightarrow df, \quad n f_0 = n/T \rightarrow f \quad (\text{variable continue}), \quad \sum \rightarrow \int$$

Finalement :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi f t'} dt' e^{j2\pi f t}$$

$X(f)$

La TF $X(f)$ apparaît comme la forme limitée de la densité spectrale de raies => **spectre de $x(t)$** . Par analogie avec la série de Fourier, on conclut que $X(f)$ analyse $x(t)$ sous forme d'une infinité de composantes sinusoidales complexes d'amplitude $|X(f)|df$ (infinitésimale si $X(f)$ bornée).

Transformées de Fourier, Spectre, Corrélation

La TF d'un signal réel $x(t)$ est en général une fonction complexe de la variable f qui peut s'écrire :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

$$= \text{SR}\{X(f)\} + j\text{SI}\{X(f)\} = \underbrace{\text{SR}\{X(f)\}}_{\substack{\text{TF de la partie} \\ \text{paire de } x(t) \\ \text{(paire)}}} + \underbrace{j\text{SI}\{X(f)\}}_{\substack{\text{TF de la partie} \\ \text{impaire} \\ \text{(impaire)}}} = \underbrace{|X(f)| \cos(\varphi_X(f))}_{\substack{\text{spectre} \\ \text{d'amplitude} \\ \text{(fonction paire)}}} + \underbrace{j|X(f)| \sin(\varphi_X(f))}_{\substack{\text{spectre de} \\ \text{phase (fonction} \\ \text{impaire)}}}$$

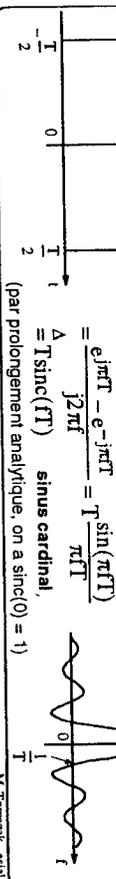
Exemple : soit le signal $x(t) = \text{rect}(t/T)$ (signal rectangulaire, centré sur 0, de durée T, voir aussi 1.13). Celui-ci est pair, en effet :

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = x(t), \quad \text{et bien sûr } : x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = 0$$

Donc, la TF de $x(t)$ est réelle.

$$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t} dt = \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{j2\pi f} = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$



Transformées de Fourier, Spectre, Corrélation

Convergence : Soit $X(\omega)$ la transformée de Fourier de $x(t)$: $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$

On cherche à savoir quand le signal $\hat{x}(t)$ est une représentation valide de $x(t)$, où $\hat{x}(t)$ est obtenu par : $\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$. Si $x(t)$ est de carré intégrable, $X(\omega)$ est fini (intégrale de Fourier converge), et l'erreur $\epsilon(t)$ entre $\hat{x}(t)$ et $x(t)$ vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e(t)|^2 dt = 0.$$

Dans ce cas, $\hat{x}(t)$ et $x(t)$ peuvent différer considérablement en certaines valeurs particulières de t , mais l'erreur est d'énergie nulle. Il existe un ensemble de conditions suffisantes pour assurer que $\hat{x}(t)$ soit égal à $x(t)$ pour tout t , sauf lors de discontinuités, où $\hat{x}(t)$ est égal à la valeur moyenne de la discontinuité. Il s'agit des conditions de Dirichlet :

- $x(t)$ doit être absolument intégrable : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$
- $x(t)$ doit présenter un nombre fini d'extrêmes dans tout intervalle de longueur finie de t
- $x(t)$ doit posséder un nombre fini de discontinuités dans tout intervalle de longueur finie de t . De plus, chaque discontinuité doit être finie.

Dérivation : $\frac{d^n x}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$
 dériv. ($n = 1$) : en dérivant par rapport à t chaque membre de : $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$, il vient : $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$, d'où le résultat cherché.

Intégration : $\int_{-\infty}^t x(u) du \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$ avec $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$

Convolution : $\hat{x}(t) * y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$
 idée de la démonstration (la dériv. rigoureuse fait appel à un résultat de mathématique, le théorème de Fubini) :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \rightarrow H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)e^{-j\omega t} dt d\tau$$

On intervertit alors l'ordre d'intégration (ceci n'est possible que dans les conditions du théorème de Fubini) :

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-j\omega t} dt d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} Y(\omega)d\tau = Y(\omega)X(\omega)$$

Modulation : $x(t)y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$
 mais $x(t)y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$

Cas particulier :
 $x(t) \cos 2\pi f_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(f+f_0) + X(f-f_0)]$

On donne à présent les principales propriétés de la TF. Les démonstrations faciles sont laissées en guise d'exercice. Des explications sont données pour les démonstrations plus délicates. Certaines autres propriétés seront étudiées et éventuellement démontrées lors du chapitre sur la transformée de Laplace.

Chgnt d'échelle de temps ($a > 0$) : $x(at) \leftrightarrow |a|^{-1} X(f/a)$
 (se démontre simplement par changement de variable $\tau = at$)

Inversion chronologique :
 $x(-t) \leftrightarrow X(-f)$ ($= X^*(f)$ si $x(t)$ réel)

Conjugaison complexe : $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$
 si $x(t)$ réel : $X(-f) = X^*(f)$

Linéarité : $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(f) + bY(f)$

Translation temporelle :

$x(t-\tau) \leftrightarrow X(f) \cdot \exp(-j2\pi f\tau)$
 (changement de variable $\sigma = t - \tau$)

Parseval :
 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$

Translation fréquentielle :
 $x(t) \cdot \exp(j2\pi f_0 t) \leftrightarrow X(f - f_0)$

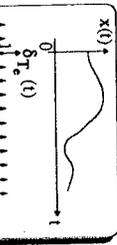
dém. : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega)e^{-j\omega t} d\omega dt$
 $= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-j\omega t} dt d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) X(\omega) d\omega$

Dualité : $FX(f) = Y(f) \Leftrightarrow FY(f) = X(-f)$ (ou $FX(f) = Y(\omega) \Leftrightarrow FY(f) = 2\pi X(-\omega)$)
 Cette propriété sera démontrée en TD. Elle est particulièrement utile pour calculer ou inverser des TF, ou pour démontrer ou déterminer des propriétés de la TF. Exemples :

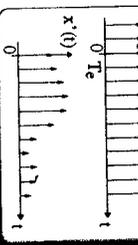
$$-j\pi x(t) \leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

$$\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0) \delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) d\nu$$

Autre exemple : les propriétés de modulation et de convolution vues précédemment sont deux propriétés duales. Considérons le cas d'une modulation particulière, la discrétisation ou échantillonnage idéal (voir transp. 1.14), c'est à dire la multiplication d'un signal par un peigne de Dirac. Dans le domaine fréquentiel, cette opération se traduit par une convolution entre la TF du signal et la TF du peigne (on verra plus tard que la TF d'un peigne unitaire de période T est un peigne de période inverse multiplié par $1/T$) :

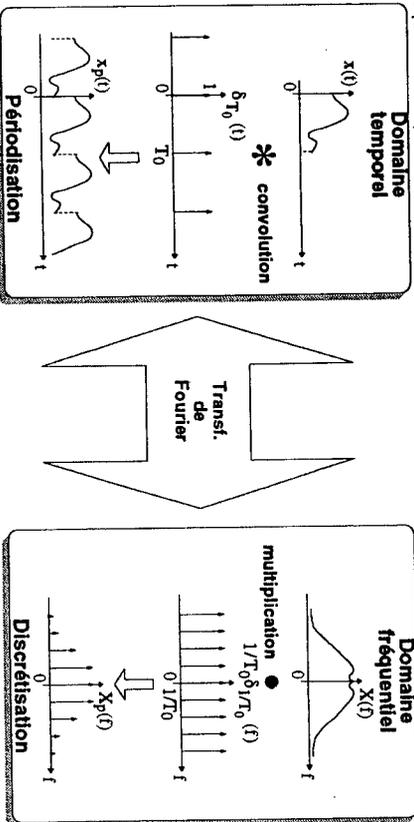


Domaine temporel \leftrightarrow **Domaine fréquentiel**
 • multiplication \leftrightarrow convolution



Discretisation \leftrightarrow **Périodisation**

Ainsi, toute opération d'échantillonnage temporel s'accompagne inévitablement d'une périodisation fréquentielle : on verra dans la suite les conséquences de ce phénomène sur les conditions à vérifier pour assurer un bon échantillonnage. Bien sûr, on observe la propriété duale : à tout échantillonnage fréquentiel correspond une périodisation temporelle :



Remarque : si le signal de départ est à temps discret, le spectre est périodique, et on obtient par conséquent un signal et son spectre tous deux discrets et périodiques.

Transformée de Fourier, Spectre, Corrélation

M. Tomczak - esil

Les signaux de cette classe, physiquement irréalisables, permettent de modéliser des catégories importantes de signaux (quasi-)permanents. Ils ne satisfont pas aux critères usuels de convergence de la TF, qui ne peut être envisagée qu'en élargissant son champ d'application aux distributions :

Dirac et constante : $\delta(t) \leftrightarrow 1$ $X(t) = C \leftrightarrow X(f) = C\delta(f)$; $(X(\omega) = 2\pi C\delta(\omega))$
 par translation : $\delta(t - \tau) \leftrightarrow \exp(-j2\pi f\tau)$ $\exp(j2\pi f_0 t) \leftrightarrow \delta(f - f_0)$

Echelon : $1(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + VP\left(\frac{1}{j2\pi f}\right)$; $\left(\pi\delta(\omega) + VP\left(\frac{1}{j\omega}\right)\right)$ $VP\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} 1/x & \forall x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Pour les signaux périodiques, on peut utiliser directement la série de Fourier. On remarque aussi :

$$F[C \cdot \cos(2\pi f_0 t)] = F\left[\frac{C}{2} \exp(j2\pi f_0 t)\right] + F\left[\frac{C}{2} \exp(-j2\pi f_0 t)\right] = \frac{C}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

$$F[C \cdot \sin(2\pi f_0 t)] = j\frac{C}{2}(\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)) = j\pi C(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$$

Peigne de Dirac : On a : $F[\delta_T(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi nTf)$ En fait, le peigne de Dirac ne représente pas un signal à puissance moyenne finie, mais est souvent utilisé pour modéliser des signaux périodiques ou échantillonnés. D'autre part, il peut être développé en série de Fourier :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi nTf} \quad \text{avec } C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-j2\pi nTf} dt = \frac{1}{T} \quad \forall n$$

$$d'où : F[\delta_T(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T}) = \frac{1}{T} \delta_1/T(f)$$

Transformée de Fourier, Spectre, Corrélation

M. Tomczak - esil

Tous les signaux de cette classe possèdent une TF.

Fonction d'intercorrélation : $\phi_{xy}(\tau) = \langle x^*, y_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau) dt$
 les signaux x et y sont orthogonaux ou non-corrélés pour chaque valeur de τ où la fonction d'intercorrélation s'annule.
 propriété : $\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}^*(-\tau)$

Fonction d'autocorrélation (FA) : $\phi_x(\tau) = \langle x^*, x_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau) dt$

Interprétation : mesure de similitude, de forme et de position, de 2 signaux.
 propriété : $\phi_x(0) = |x|^2 = E_x = \max(\phi_x(\tau))$
 remarque : $\phi_{xy}(\tau) = x^* \cdot (-\tau) * y(\tau)$

Densité spectrale d'énergie : $\Phi_x(f) = F[\phi_x(\tau)]$

D'après les résultats précédents : $\Phi_x(f) = F[x^*(-\tau) * x(\tau)] = X^*(f)X(f) = |X(f)|^2$

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \xrightarrow{\tau=0} E_x = \phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df$$

L'énergie totale du signal peut aussi se calculer en intégrant sa distribution fréquentielle (identité de Parseval), qui est donc appelée densité spectrale d'énergie.

Si x(t) est réel, la FA est réelle, paire, donc sa transformée également : $\Phi_x(f) = \Phi_x(-f)$

Transformée de Fourier, Spectre, Corrélation

M. Tomczak - esil

Corrélation des signaux à puissance moyenne finie non-nulle :

Le produit scalaire précédent étant inutilisable, on lui substitue la valeur moyenne limite :

$$\tilde{\phi}_{xy}(\tau) = \langle x^*, y_\tau \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t+\tau) dt$$

Avec cette définition, les fonctions d'inter- et d'autocorrélation jouissent des mêmes propriétés que celles des signaux à énergie finie. Pour deux signaux T-périodiques, la limite disparaît dans la relation précédente. La FA d'un signal périodique l'est également.

Densité spectrale de puissance (dsp) : $\tilde{\Phi}_x(f) = F[\tilde{\phi}_x(\tau)]$

Pour $\tau = 0$, on obtient : $P_x = \tilde{\phi}_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}_x(f) df$

La fonction $\tilde{\phi}_x(t)$ représente donc bien la distribution fréquentielle de la puissance totale du signal. Contrairement au cas du spectre d'énergie, la dsp n'est pas égale au carré du module de la TF du signal. Toutefois, on peut établir :

$$\tilde{\phi}_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \quad (\text{si } \lim_{T \rightarrow \infty} \exists) \text{ où } X(f, T) \text{ est la TF du signal à E finie constitué par la portion de } x(t) \text{ comprise entre } -T/2 \text{ et } T/2$$

$$\text{Si } x(t) \text{ T-périodique : } \tilde{\phi}_x(t) = \frac{1}{T^2} |X(f, T)|^2 \cdot \delta_T/T(f)$$

Transformée de Fourier, Spectre, Corrélation

M. Tomczak - esil

SIGNAUX 1. Cas des signaux à temps discret

La TF d'un signal discret $x(k)$ est définie par :

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \text{ou bien} \quad X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \exists \text{ si } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$$

Condition suffisante d'existence : le signal est **absolument sommable**. La condition nécessaire est sujette à de nombreuses définitions et interprétations, on admettra que $X(\omega)$ existe pour tous les signaux à énergie finie (de carré sommable).

PROPRIÉTÉ : la TF d'un signal discret est périodique :

$$X(f+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi(f+1)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi fn} e^{-j2\pi n} = X(f)$$

Tout intervalle de longueur unité étant suffisant pour décrire $X(f)$, on utilise généralement l'intervalle principal $[-1/2, 1/2]$; $X(f)$ étant périodique, on peut considérer la définition précédente comme son développement en série de Fourier. Par conséquent, les valeurs du signal $x(k)$ peuvent être calculées comme les coefficients de ce développement, selon la relation établie plus tôt :

$$x(n) = \frac{1}{F} \int_{-F/2}^{F/2} X(f) e^{j2\pi fn} df = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi fn} df \quad \text{Transformée de Fourier inverse}$$

SIGNAUX 1. Cas des signaux à temps discret

Translation : $x(k)e^{j2\pi f_0 n} \leftrightarrow X(f - f_0) \quad x(k - k_0) \leftrightarrow X(f) e^{-j2\pi k_0 f}$

Convolution : $x(k) * y(k) \leftrightarrow X(f) Y(f) \quad (\text{convolution discrète})$

$$x(k), y(k) \leftrightarrow X(f) * Y(f) = \int_{-1}^1 X(f') Y(f - f') df'$$

On remarque que dans ce dernier cas, le produit de convolution est un produit de convolution périodique continu. En effet, et ceci vaut tant pour les signaux discrets que continus, le produit de convolution de signaux périodiques ne converge pas et doit être remplacé par un produit périodique, calculé sur une seule période, ce qui n'a de sens que si les signaux ont la même période.

REMARQUE :

Bien que son intérêt théorique soit indiscutable, la TF, telle qu'elle vient d'être définie, n'est pas directement utilisable dans les applications pratiques numériques. Elle fait appel à un nombre infini de valeurs, et, d'autre part, la variable f n'est pas compatible avec la nature discrète des systèmes de traitement numériques. On verra ultérieurement une version modifiée appelée **Transformée de Fourier Discrète (TFD)**, adaptée aux traitements numériques, et que l'on peut calculer à l'aide d'algorithmes particulièrement "rapides" (algorithmes TFR ou FFT).

SIGNAUX 1. Cas des signaux à temps discret

Avec les définitions précédentes, on retrouve la plupart des définitions et résultats obtenus avec les signaux continus. On livre ici sans démonstration l'essentiel de ceux-ci. On retrouvera d'autres propriétés lors de l'étude de la transformée en z.

$$X(f) = \underbrace{|X(f)|}_{\text{spectre d'amplitude}} \exp(j \arg\{X(f)\}) \quad \underbrace{\phi_x(f)}_{\text{spectre de phase}} = |X(f)|^2 \quad \text{spectre d'énergie}$$

Corrélation :

$$\phi_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k) y(k+n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k-n) y(k) = \phi_{yx}^*(-n) ; \phi_{xx}(n) = \phi_x(n)$$

$$F[\phi_x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k) x_{k+n} \right) e^{-j2\pi fn} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m e^{-j2\pi fm} = X^*(f) X(f) = \phi_x(f)$$

Parallèlement : En particulier :

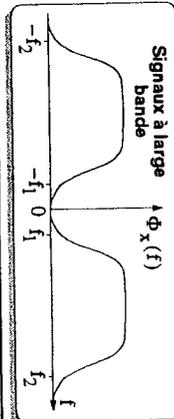
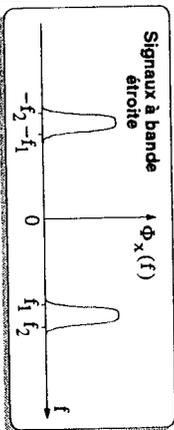
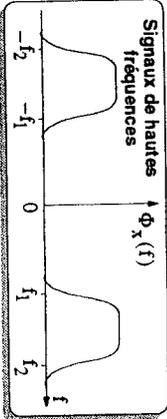
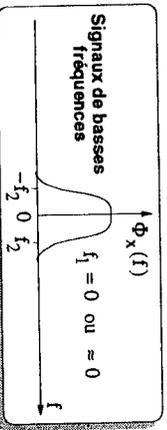
$$\phi_x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} \phi_x(f) e^{j2\pi fn} df \quad E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k| k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k^* x_k = \phi_x(0) = \max_x(\phi_x(n)) = \int_{-1/2}^{1/2} \phi_x(f) df$$

SIGNAUX 1. LARGEUR DE BANDE d'un signal

L'analyse spectrale d'un signal conduit à une classification basée sur la distribution de son énergie ou de sa puissance en fonction de la fréquence (spectre). La **largeur de bande B** d'un signal est le domaine principal des fréquences (positives ou négatives) occupé par son spectre, ou, plus exactement, où celui-ci est supérieur à une valeur convenue. Selon le cas, cette valeur peut être considérée relativement à $\phi_x(0)$ ou à $\max(\phi_x)$:

$B = f_2 - f_1$ avec $0 \leq f_1 < f_2$, où f_1 et f_2 sont les fréquences de coupure.

On distingue alors couramment :

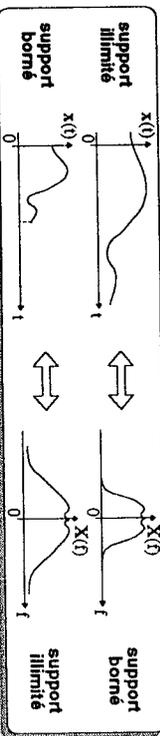


SIGNAUX 1. LARGEUR DE BANDE d'un signal 37

Un signal dont le spectre est nul en dehors d'une bande de fréquence spécifiée est dit à **bande limitée** ou à **soutien spectral borné**.
 Pour un signal à bande étroite, les fréquences de coupure sont souvent définies comme les valeurs de f pour lesquelles $\Phi_X(f)/\max(\Phi_X) = 1/2$, c'est à dire les **fréquences de coupure à -3 dB** ($=10 \cdot \log(0.5)$). Pour un signal à large bande, on préfère définir les fréquences de coupure par rapport à $\Phi_X(f)$ plutôt que $\max(\Phi_X)$.

Dans le cas des signaux à énergie finie, donc physiquement réalisables, les distributions temporelle $x^2(t)$ et fréquentielle $\Phi_X(f) = |X(f)|^2$ de cette énergie tendent nécessairement vers 0 lorsque $|t|$ et $|f|$ tendent vers l'infini. L'étude de la dispersion énergétique sur l'axe des temps ou des fréquences peut être utile. D'après la propriété de changement d'échelle des temps précédente (1.26), il apparaît qu'une contraction d'un signal correspond à une dilatation de son spectre et vice versa, ce qui suggère l'existence d'une relation entre dispersion temporelle et fréquentielle. On montre notamment que le produit durées par largeur de bande d'un signal est borné inférieurement (**principe d'incertitude**).

Remarque : tout signal physiquement réalisable ne peut être simultanément à bande limitée (ceci est une conséquence du théorème de Paley-Wiener). On montre par ailleurs qu'un signal de spectre borné est de durée infinie et est indéfiniment dérivable, et qu'un signal de durée finie a un spectre non-borné.



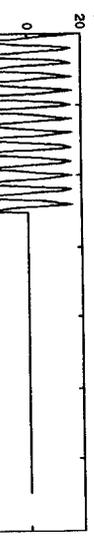
1. transformées de Fourier, Spectre, Corrélation M. Tomczak - eadl

SIGNAUX 1. EXEMPLES D'APPLICATIONS 39

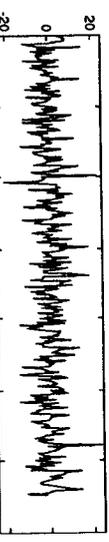
En négligeant la présence du bruit $b(t)$ et en exprimant l'intercorrélation entre signal émis et reçu, il vient :

$$\phi_{ur}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)r(t+\tau)dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)u(t+\tau-t_1)dt = a \cdot \phi_u(\tau-t_1) \rightarrow \text{maximal en } \tau = t_1$$

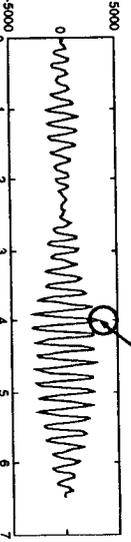
Le principe reste valable si le bruit est décorrélié du signal émis. **Exemple** :



Le signal émis est une impulsion sinusoidale d'équation : $15.5 \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t)$



Signal de retour, retardé de 4 secondes, atténué d'un facteur 5, et noyé dans un bruit blanc (RSB = -10 dB).



Le maximum de la fonction d'intercorrélation est atteint à $t = 4$, ce qui correspond bien au retard cherché.

Transformées de Fourier, Spectre, Corrélation M. Tomczak - eadl

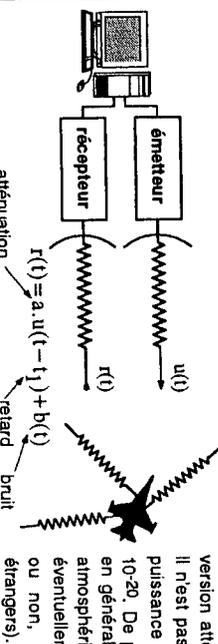
SIGNAUX 1. EXEMPLES D'APPLICATIONS 38

SONAR, RADAR A CORRELATION : On présente ici le principe de fonctionnement des radars à corrélation. On raisonne dans le cas continu, mais il est évident que tous les traitements peuvent être effectués par un ordinateur. Le procédé repose sur une propriété de la F.A. d'un signal continu $u(t)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)u(t+\tau)dt \geq 0, \forall \tau$. Ceci n'est pas étonnant, on conçoit bien qu'il n'y a pas de meilleure corrélation que lorsque le signal est comparé avec lui-même, non décalé.

Preuve : on part de la relation : $\int_{-\infty}^{+\infty} [u(t) \pm u(t+\tau)]^2 dt \geq 0, \forall \tau$. On en tire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t+\tau)dt \pm 2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)u(t+\tau)dt \geq 0, \forall \tau, d'où : 2\phi_u(0) \pm 2\phi_u(\tau) \geq 0, \forall \tau$$

Si on suppose que le radar émet le signal $u(t)$, celui-ci est réfléchi par la cible et est reçu par le radar après un temps t_1 , proportionnel à la distance émetteur/cible.



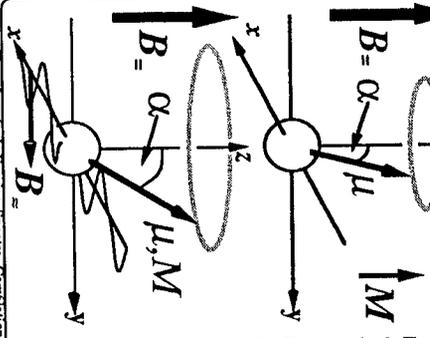
Transformées de Fourier, Spectre, Corrélation M. Tomczak - eadl

SIGNAUX 1. EXEMPLES D'APPLICATIONS 40

SPECTROSCOPIE RMN 13C : cette technique est utilisée notamment pour effectuer l'analyse chimique de mélanges complexes, en particulier d'hydrocarbures. Le principe (simplifié !) de la **résonance magnétique nucléaire (RMN)** repose sur l'**oscillation de Larmor** :

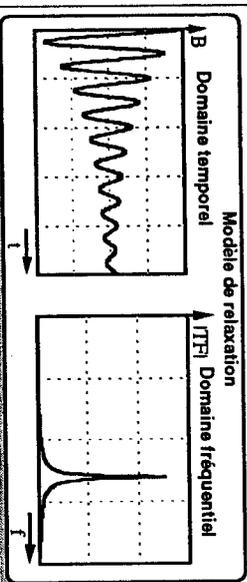
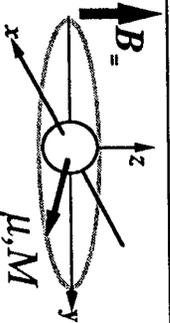
Si on soumet un ensemble d'atomes d'un type à un champ magnétique statique B_0 , les atomes ont un moment angulaire μ , animé d'un mouvement de **précession**, à la fréquence dite de Larmor, celle-ci dépendant de l'amplitude du champ B_0 et étant caractéristique du type d'atome considéré (carbone-13 en l'occurrence). L'oscillation du vecteur moment angulaire engendre un mouvement des électrons qui, à son tour, induit un champ magnétique colinéaire à μ . La phase de μ étant aléatoire, le moment angulaire global M , qui résulte de la superposition des moments angulaires de chaque atome, est stationnaire et de même direction que le champ B_0 .

Pour effectuer l'analyse RMN, on applique un deuxième champ magnétique B_1 oscillant, perpendiculaire au premier, de fréquence égale à la fréquence de Larmor, et qui va forcer tous les moments angulaires à osciller en phase. Le moment angulaire global M n'est alors plus statique, mais oscille avec la même fréquence et la même phase que les vecteurs μ locaux. De plus, le champ B_1 excite les atomes, ce qui se traduit par une augmentation de l'angle quantique α .



Transformées de Fourier, Spectre, Corrélation M. Tomczak - eadl

Quand la durée de l'excitation est suffisante et que l'angle quantique est grand, on arrête le champ magnétique oscillant. Les atomes commencent le processus de relaxation. On mesure alors le champ magnétique induit par le mouvement des électrons. La fréquence de ce champ est caractéristique du type d'atome, et sa puissance représentative de la concentration d'atomes présents dans le produit. Jusqu'ici, on a considéré un seul type de molécule. Dans un ensemble de différentes molécules, la fréquence de résonance, pour le noyau observé, n'est pas constante car le champ B_z est modifié localement par l'environnement des électrons. Le champ induit présentera donc en réalité un ensemble de fréquences différentes, caractéristiques des structures chimiques en présence.



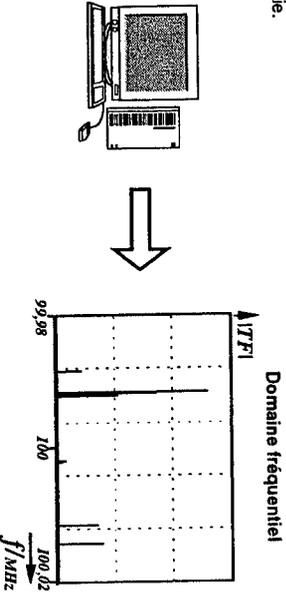
Transformée de Fourier, Spectre, Corrélation

Le champ induit est mesuré à l'aide de la bobine qui engendre le champ oscillant, celle-ci étant disponible dès la fin de l'excitation. Le signal, qui est constitué d'une somme bruitée de sinusoides amorties, peut alors être échantillonné et traité sur ordinateur.

M. Tomczak - casil

SIGNAUX 1. EXEMPLES D'APPLICATIONS

L'étape suivante est le calcul de la transformée de Fourier qui permet d'obtenir le spectre du signal. Pour cela, on utilise un algorithme de Transformée de Fourier Rapide. L'information utile est contenue dans la position des différentes raies (fréquences des sinusoides amorties) et la surface sous ces raies (amplitude initiale des sinusoides amorties). Dans les cas simples, la surface peut être déterminée directement par intégration numérique, mais il arrive fréquemment que des raies soient trop proches et donc enchevêtrées. Il faut alors procéder à un désenchevêtrement pour déterminer la surface respective de chaque raie.



La connaissance des fréquences et des amplitudes correspondantes peut se résumer sous forme d'un "spectre bâton". C'est à partir de celui-ci que l'expert va enfin pouvoir effectuer l'analyse chimique qualitative et quantitative du mélange étudié.

Transformée de Fourier, Spectre, Corrélation

M. Tomczak - casil

Ethylbenzène C_6H_5 + Chloroforme

T^0 constante

$B_z \approx 4$ Teslas

Spectromètre

bobines supraconductrices mesure

excitation

I_e

10 μs

Amplitude

Domaine temporel

131071 π

L'utilisation de bobines supraconductrices permet de diminuer le niveau du bruit, mais néanmoins, la mesure reste très bruitée.

Dans l'exemple choisi, la fréquence de Larmor est de l'ordre de 100 MHz, mais la largeur de bande utile est bien plus réduite, c'est pourquoi la fréquence d'échantillonnage f_e n'est que de 400 KHz. Avant de passer dans le domaine spectral, le signal temporel, appelé signal de précession libre, peut subir différents traitements sur ordinateur (accumulations pour améliorer le RSB, filtrage, etc.).

Transformée de Fourier, Spectre, Corrélation

M. Tomczak - casil

TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER

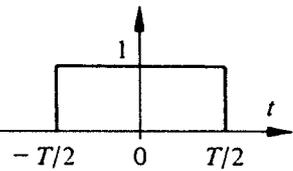
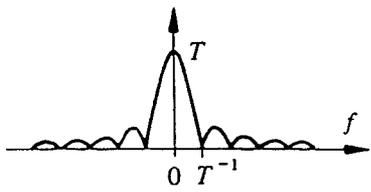
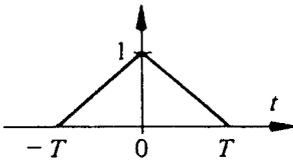
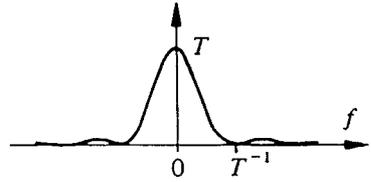
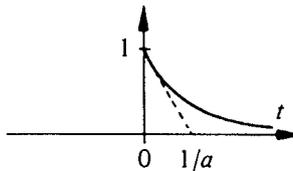
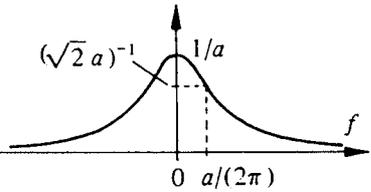
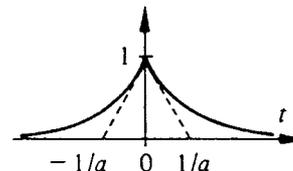
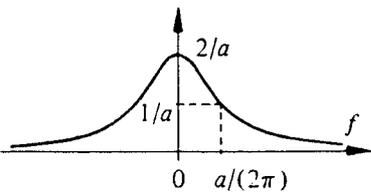
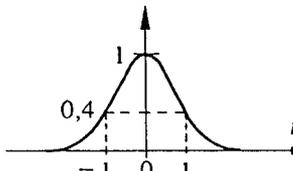
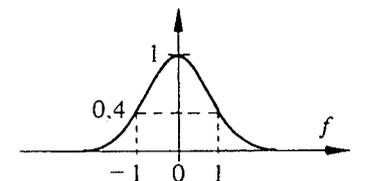
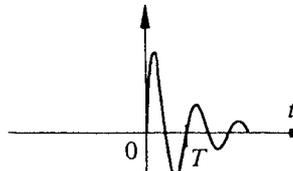
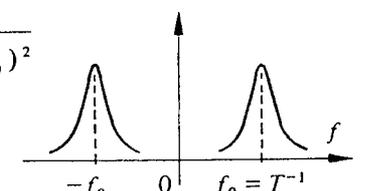
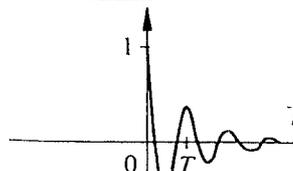
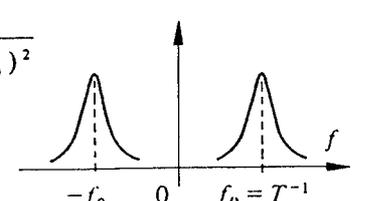
$x(t)$		$X(f)$	$ X(f) $
 <p>impulsion rectangulaire</p>	$\text{rect}(t/T)$	$T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$ $= T \text{sinc}(fT)$	
 <p>impulsion triangulaire</p>	$\text{tri}(t/T)$	$= T \text{sinc}^2(fT)$	
 <p>impulsion exponentielle</p>	$e^{-at}\epsilon(t)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$	
 <p>double exponentielle</p>	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	
 <p>impulsion gaussienne</p>	$\text{ig}(t) = e^{-\pi t^2}$	$\text{ig}(f) = e^{-\pi f^2}$	
 <p>sinusoïde amortie</p>	$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t) \epsilon(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$	
 <p>cosinusoïde amortie</p>	$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t) \epsilon(t)$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$	

TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (suite)

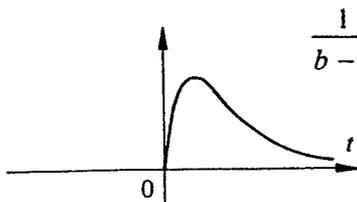
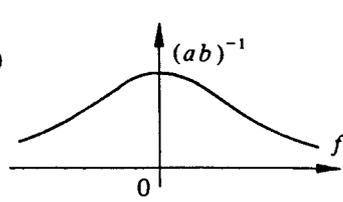
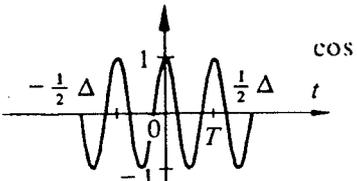
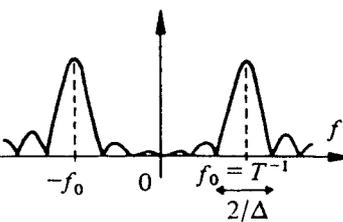
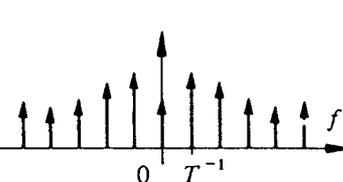
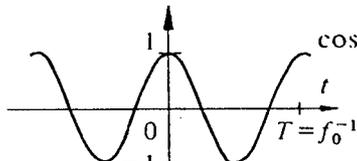
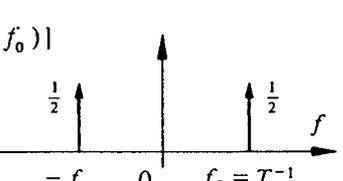
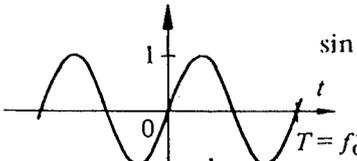
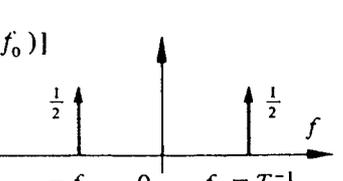
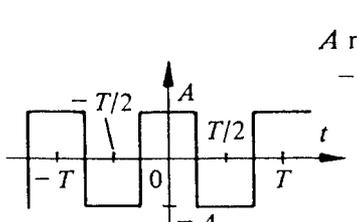
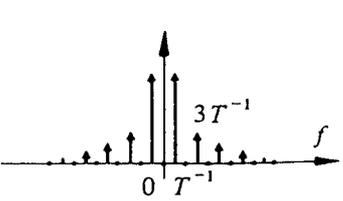
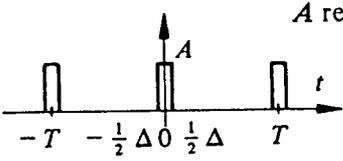
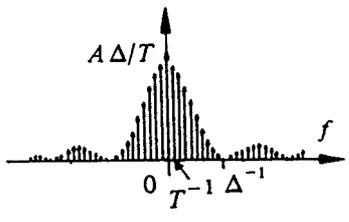
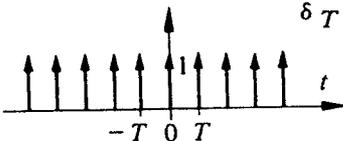
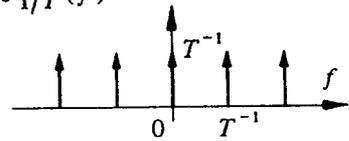
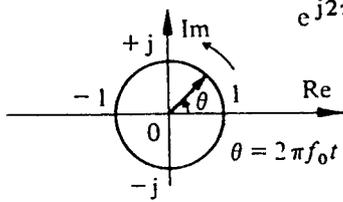
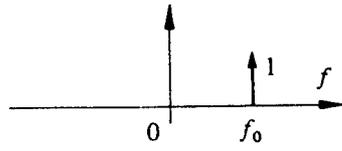
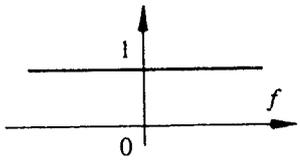
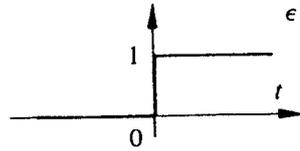
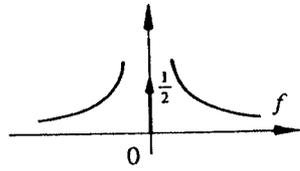
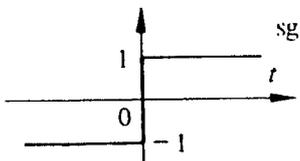
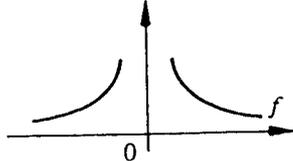
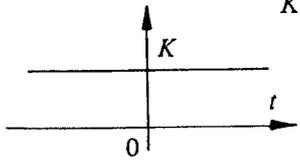
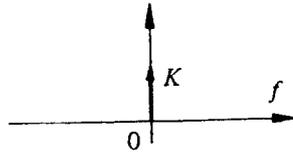
$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 $\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \epsilon(t)$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)(b + j2\pi f)}$	 $(ab)^{-1}$
 $\cos(2\pi f_0 t) \cdot \text{rect}(t/\Delta)$ <p>impulsion cosinusoidale</p>	$\frac{\Delta}{2} \{ \text{sinc}[\Delta(f+f_0)] + \text{sinc}[\Delta(f-f_0)] \}$	
 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{-j2\pi \frac{nt}{T}}$ <p>signal périodique</p>	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$	
 $\cos(2\pi f_0 t)$ <p>signal cosinusoidal</p>	$\frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$	
 $\sin(2\pi f_0 t)$ <p>signal sinusoidal</p>	$\frac{j}{2} [\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)]$	
 $A \text{ rep } \mathcal{T} [2 \text{ rect}(2t/T) - \text{rect}(t/T)]$ <p>onde carrée</p>	$\sum_n X_n \delta(f - n/T)$ <p>avec</p> $X_n = A \text{ sinc}(n/2)$ $= \begin{cases} \left \frac{2A}{\pi n} \right & \text{pour } n = \pm 1, \pm 5, \dots \\ -\left \frac{2A}{\pi n} \right & \text{pour } n = \pm 3, \pm 7, \dots \end{cases}$ <p>$X_n = 0$ pour n nul ou pair</p>	

TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (suite)

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
<p>$A \text{ rep } T [\text{rect}(t/\Delta)]$</p>  <p>suite d'impulsions rectangulaires</p>	$\sum_n X_n \delta(f - n/T) \text{ avec}$ $X_n = \frac{A\Delta}{T} \text{sinc}(n\Delta/T)$	
 <p>peigne de Dirac</p>	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f)$	
 <p>$e^{j2\pi f_0 t}$</p>	$\delta(f - f_0)$	
 <p>$\delta(t)$</p>	1	
 <p>$\epsilon(t)$</p>	$\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$	
 <p>$\text{sgn}(t) = \frac{t}{ t }$</p>	$\frac{1}{j\pi f}$	
 <p>K</p>	$K \delta(f)$	
<p>constante</p>		

INTRODUCTION :

On a vu que l'on pouvait calculer la TF de certains signaux à énergie infinie au sens des distributions (constante, échelon, impulsion, etc.). Cependant, certains signaux n'ont pas de TF du tout (par exemple : $x(t) = e^{t.1(t)}$). Pour pallier cette insuffisance, une transformée du même type a été développée par Laplace.

On verra que le calcul transformational est très utile pour résoudre des équations différentielles, ceci dans le cadre de l'analyse des systèmes (ainsi, il faut calculer une intégrale de convolution pour déterminer la réponse forcée, il est alors intéressant de transformer l'équation différentielle). Dans ce cas, il est avantageux d'employer la transformée de Laplace (TL) plutôt que la TF, en particulier pour accéder aux régimes transitoires (la réponse fréquentielle est une réponse permanente).

DEFINITION : Soit un signal $x(t)$, non absolument sommable, mais pour lequel il existe un réel α tel que le produit $x(t)\exp(-\alpha t)$ soit absolument sommable. On peut dès lors définir la TF de ce produit. Soit alors un intervalle Σ tel que pour le réel $\sigma \in \Sigma$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

On définit la TL $H(s)$ de $x(t)$:

$$s \text{ est une variable complexe } = \sigma + j\omega$$

$$L[x(t)] = H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

TL bilatère

Transformée de Laplace, Equations différentielles

M. Tomczak - cat1

Il en résulte qu'un problème, dans lequel interviennent des sommes et/ou dérivées de différents signaux $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, ne pourra être résolu à l'aide des TL que si l'intersection Σ des intervalles $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ associés est non vide. En général, on est confronté aux deux cas suivants :

Signaux absolument sommables : Σ est alors non vide car, notamment, $\sigma = 0$ appartient à tous les intervalles Σ_i . Dans ce cas, on peut passer de la TL à la TF en faisant simplement $s = j\omega$:

$$X(s) = H(s)|_{s=j\omega} ; H(s) = X(j\omega)|_{\omega=-\frac{s}{j}}$$

Signaux causaux, de croissance au plus exponentielle (contre-exemple : $\exp(\Sigma t)$) : Dans ce cas, si α est suffisamment grand (2α abscisse de convergence), la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt = \int_0^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt \text{ est assurée, et } \Sigma \text{ est non vide, la borne sup des } \Sigma_i \text{ étant infinie}$$

On est ici clairement dans le cadre de la TL monolatère, et il n'y a alors pas d'ambiguïté face à une transformée $X(s)$ qui possède un seul original causal. En revanche, le passage direct entre TL et TF n'est possible que dans le cas précédent (sauf cas limites avec TF au sens des distributions).

Notons, pour conclure, que dans la pratique courante, on calcule rarement explicitement une TL, on utilise, dès que possible, une Table de Transformée de Laplace.

De même, dans la plupart des cas, on est confronté à des TL sous forme de fractions rationnelles ; bien que l'intégrale de Mellin-Fourier se calcule alors facilement à l'aide du théorème des résidus, on préfère décomposer les fractions rationnelles en éléments simples existant dans la Table.

On utilise aussi la TL monolatère (lorsqu'on se limite aux signaux causals, les deux transformées sont identiques) :

On dit que $X(s)$ est l'image de $x(t)$ et que $x(t)$ est l'original de $X(s)$.

Lorsque le signal comporte une impulsion (ou une singularité d'ordre supérieur) en 0, il est nécessaire (cas monolatère) de faire une distinction supplémentaire :

$$L_+[x(t)] = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad L_-[x(t)] = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt + \int_0^+ x(t)e^{-st} dt$$

Dans la pratique, on utilisera exclusivement la TL monolatère. Toutefois, et sans que cela ne remette ce point en cause, on raisonnera à partir de la TL bilatère dans le reste du chapitre, afin notamment de souligner le parallèle avec la TF.

On vient de voir que $H(s) = H(\sigma + j\omega)$ est la TF de $x(t)\exp(-\sigma t)$, appliquons la TF inverse :

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\sigma + j\omega)e^{j\omega t} d\omega \rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

$$\rightarrow L^{-1}\{H(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} H(s)e^{st} ds \quad (\sigma \in \Sigma) \quad \text{TL inverse (formule de Mellin-Fourier)}$$

Remarque : $H(s)$ TL bilatère n'a de sens que si Σ est précisé, exemple : $L[x_1(t)] = L[x_2(t)] = \frac{1}{s-2}$, mais $\Sigma_1 =]2, +\infty[$ et $\Sigma_2 =]-\infty, 2[$.

Transformée de Laplace, Equations différentielles

M. Tomczak - cat1

On présente ici quelques propriétés de la TL bilatère. Si la TF existe (i.e si 0 est dans Σ), les propriétés correspondantes s'obtiennent en posant $s = j\omega$. Les différences avec le cas monolatère (à utiliser exclusivement pour des signaux causals) sont signalées.

Linéarité : $L[ax(t) + by(t)] = aH(s) + bY(s)$ (dém. évidente)

Convolution : $L[x(t)*y(t)] = H(s).Y(s)$ (voir dém. TF)

Dérivation : $L\{x'(t)\} = sX(s) - x(0^+)$

$L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - x(0^+) \rightarrow \begin{cases} L_+[x(t)] = sX(s) - x(0^+) \\ L_-[x(t)] = sX(s) - x(0^-) \end{cases}$

(bilatère) (monolatère) de façon similaire : $L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} x^{(i)}(0^\pm)$

Démonstration dans le cas monolatère ($n = 1$) :

$$L\{x'(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)e^{-st} dt \xrightarrow{\text{par parties}} \begin{cases} \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \\ - \int_0^- x(t) [-se^{-st}] dt = 0 - x(0^-) + sX(s) \end{cases}$$

$$\{x(t)e^{-st}\}_{t=-\infty}^{+\infty} = 0 \text{ pour } \forall t \{s\} \in \Sigma, \text{ puisque dans ce cas, } |x(t)e^{-st}| \text{ est sommable par hypothèse}$$

Par calcul direct, ou, le cas échéant, en utilisant les propriétés précédentes, il est aisé d'établir les transformées de Laplace des signaux de référence :

Echelon $\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}; \sigma \in \Re\{s\} > 0$

Impulsion $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

Rampe $\mathcal{L}\{t\} = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$

Signaux harmoniques

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega_0 t} \cdot 1(t)\} = \frac{1}{s - j\omega_0} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\{\cos \omega_0 t \cdot 1(t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \\ \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t \cdot 1(t)\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \end{cases}$$

mais $\mathcal{L}\{e^{j\omega_0 t}\} = \mathcal{L}\{e^{j\omega_0 t} \cdot 1\} = 2\pi\delta\left(\frac{s - j\omega_0}{j}\right) \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\} = \pi\delta\left(\frac{s}{j} - \omega_0\right) + \pi\delta\left(\frac{s}{j} + \omega_0\right) \\ \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\} = \frac{\pi}{j}\delta\left(\frac{s}{j} - \omega_0\right) - \frac{\pi}{j}\delta\left(\frac{s}{j} + \omega_0\right) \end{cases}$

Transformée de Laplace, Equations différentielles M. Tomczak - caali

Dorénavant, sauf si le contraire est précisé, on se place dans le cadre de la TL monolatère (signaux causaux uniquement). La plupart du temps, les TL qu'on rencontrera seront sous la forme de somme d'éléments du type :

$$C(s) = \sum_{i=0}^m c_i s^i \quad e^{-st} \quad ; \quad m < n \text{ (nertie)} ;$$

$$D(s) = \sum_{i=0}^n d_i s^i \quad \text{Th. du retard} \quad c_i \text{ et } d_i \text{ réels}$$

(système physique)

Si $m \geq n$, on commence par effectuer la division de façon à faire apparaître un polynôme en s plus un terme de la forme précédente.

La décomposition en éléments simples dépend des pôles de $X(s)$, i.e. des zéros de $D(s)$, qui doivent donc être connus. Ceux-ci peuvent être réels ou complexes, mais dans ce dernier cas, il sont forcément accompagnés de leur conjugué ($D(s)$ est à coeff. réels).

Par ailleurs, les pôles peuvent être simples ou multiples. Finalement, $X(s)$ peut s'écrire :

$$X(s) = \underbrace{\sum_{i=1}^L \frac{\alpha_i}{s + a_i}}_{\text{L pôles réels simples}} + \sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^m \frac{\alpha_{m,q}}{(s + a_m)^q} + \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n s + \beta_n}{s^2 + a_n s + b_n} + \text{P termes - pôles cphes mult.}$$

(système physique)

Transformée de Laplace, Equations différentielles M. Tomczak - caali

On essaie de faire apparaître des éléments simples de la forme de ceux présents dans la Table de TL, ou bien on utilise :

$$\frac{\alpha_i}{s + a_i} \rightarrow \alpha_i e^{-a_i t} \cdot 1(t) \quad \frac{\alpha_m}{(s + a_m)^r} \rightarrow \frac{\alpha_m e^{-a_m t} \cdot t^{r-1}}{(r-1)!} \cdot 1(t)$$

$$\frac{\alpha_n s + \beta_n}{s^2 + a_n s + b_n} \rightarrow \begin{cases} e^{-\frac{a_n}{2} t} \cdot 2 \left(\alpha_n \cos \omega_n t + \gamma \sin \omega_n t \right) \cdot 1(t) \\ \omega_n = \sqrt{b_n - \frac{a_n^2}{4}} ; \quad \gamma = \frac{\beta_n - \frac{\alpha_n a_n}{2}}{\omega_n} \end{cases}$$

Pour le reste, on utilise la linéarité de la TL, ainsi que le théorème du retard pour traiter les termes en $\exp(-st)$.

Résolution d'équations différentielles : la TL permet la résolution d'équations différentielles linéaires et à coefficients constants.

Exemple :

$$\begin{cases} 3x + 2x = 3 \cdot 1(t) \\ x(0) = a \text{ constante} \end{cases} \xrightarrow{\text{TL}} 3(sX(s) - x(0)) + 2X(s) = \frac{3}{s} \rightarrow X(s) = \frac{3}{s(3s+2)} + \frac{3a}{3s+2}$$

$$\rightarrow X(s) = \frac{1}{s} + \frac{a}{s + \frac{2}{3}} = \frac{3}{2s} + \frac{a - \frac{3}{2}}{s + \frac{2}{3}} \xrightarrow{\text{TL}^{-1}} x(t) = \left[\frac{3}{2} + \left(a - \frac{3}{2} \right) e^{-\frac{2}{3}t} \right] \cdot 1(t)$$

Transformée de Laplace, Equations différentielles M. Tomczak - caali

INTRODUCTION :

On a vu précédemment que la T.L. qui substitue à un signal à temps continu une fonction d'une variable complexe s, possède des propriétés intéressantes, notamment pour résoudre des équations différentielles : substitution convolution / produit, opérateur analytique (dérivée) remplacé par un opérateur algébrique (s). La **Transformée en z** est un outil analogue, développé pour le traitement des signaux à temps discret, qui permet en particulier la résolution de l'équivalent discret des équations différentielles, les **équations aux différences**.

DEFINITION :

Soit un signal x(k) et un intervalle Δ = [λ₁, λ₂] tel que, pour λ ∈ Δ, la somme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\lambda^{-n}$ converge. La Tz de x(k), fonction de la variable complexe z, est alors définie par :

$Z[x(k)] = H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} ; \lambda_1 \leq |z| \leq \lambda_2$

Tz bilatère

$Z[x(k)] = X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} ; |z| \geq \lambda_1$

Tz monolatère

La distinction entre les deux transformations n'est pas nécessaire si l'on se limite à l'analyse de signaux causaux. En pratique, X(z) se présente généralement sous la forme de fraction rationnelle en z, dont les coefficients du développement X(z) = a + b z⁻¹ + c z⁻² + ... sont bien sûr les valeurs numériques du signal x(k) : a = x(0), b = x(1), c = x(2), etc.

Transformée en z, Equations aux différences

M. Tomczak - edul

Relation entre la Tz d'un signal discret et sa Tf :
La Tf est donc la Tz, calculée pour z appartenant au cercle unité.

$X(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$

Linéarité :

$Z[ax(k) + by(k)] = aH(z) + bV(z)$

Convolution :

$Z[x(k)*y(k)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)y(n-m) \right] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m)z^{-m} y(n-m)z^{n-m}$
 $= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)z^{-m} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} y(i)z^{-i} = H(z)V(z)$

Translation :

$Z[x(k+m)] = z^m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+m)z^{-(n+m)} = z^m H(z)$
 $Z[x(k-m)] = z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m)z^{-(n-m)} = z^{-m} H(z)$

z⁻¹ peut être assigné à un opérateur retard.

Monolatère (signal causal) :

$Z[x_{k+m}] = z^m \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n+m} z^{-(n+m)} = z^m \sum_{i=0}^{+\infty} x_i z^{-i} = z^m \left(X(z) - \sum_{i=0}^{m-1} x_i z^{-i} \right)$
 $Z[x_{k-m}] = z^{-m} \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n-m} z^{-(n-m)} = z^{-m} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i z^{-i} = z^{-m} X(z)$

Transformée en z, Equations aux différences

M. Tomczak - edul

Impulsion :

$x(k) = \delta(k-m) \rightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n-m)z^{-n} = z^{-m} ; \Delta =]0, +\infty[$
 en particulier : $x(k) = \delta(k) \rightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)z^{-n} = z^0 = 1$

Echelon :

$x(k) = 1(k) \rightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} ; \Delta =]1, \infty[$

Rampe :

$x(k) = r(k) \rightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n z^{-n} = z^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} n z^{-n-1} = z^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dz} z^{-n-1} (z^{-n})$
 $= z^{-1} \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n-1} = z^{-1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} ; \Delta =]1, \infty[$

Signal exponentiel :

$x(k) = \alpha^k 1(k) \rightarrow H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} ; \Delta =]|\alpha|, \infty[$
 $x(k) = e^{j\omega_0 k} 1(k) \rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} \cos \omega_0 + |z|^{-1} \sin \omega_0} \rightarrow \begin{cases} Z[\cos(\omega_0 k) 1(k)] = \Re\{H(z)\} \\ Z[\sin(\omega_0 k) 1(k)] = \Im\{H(z)\} \end{cases}$

Transformée en z, Equations aux différences

M. Tomczak - edul

Multiplication par ak :

$Z[a^k x_k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n x_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n (a^{-1} z)^{-n} = H(a^{-1} z)$

Différence :

$Z[x_k - x_{k-1}] = Z[\Delta x_k] = H(z) - z^{-1} H(z) = (1-z^{-1})H(z)$
 de même : $Z[\Delta^m x_k] = (1-z^{-1})^m H(z)$ $Z[V^m x_k] = Z[x_k - x_{k-1}] = (z-1)H(z)$
 $Z[V^m x_k] = (z-1)^m H(z)$ NB, en monolatère : $Z[V^m x_k] = (z-1)^m X(z) - z \sum_{i=0}^{m-1} (z-1)^{m-i-1} V^i x_0$

Somme (cas monolatère) :

$Z[y_k] = \sum_{n=0}^k x_n = Z[x_k] + Z[y_{k-1}] = \sum_{n=0}^k x_n \Rightarrow Z[\sum_{n=0}^k x_n] = \sum_{n=0}^k Z[x_n]$ d'où : $Z[\sum_{n=0}^k x_n] = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$

Valeur initiale (signal causal) :

$x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z)$ si la limite existe

Valeur finale :

$Z[x_k] = H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k z^{-k} ; Z[x_{k-1}] = z^{-1} H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{k-1} z^{-k}$
 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k z^{-k} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{k-1} z^{-k} = (1-z^{-1})H(z)$ En prenant la limite des 2 membres quand z tend vers 1 :
 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (x_k - x_{k-1}) = x_{\infty} - x_{-\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})H(z)$ d'où : $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})H(z)$
 si $x_{-\infty} = 0$ (vrai pour un signal causal) et si les pôles en z de $(1-z^{-1})H(z)$ sont tous de module < 1

Transformée en z, Equations aux différences

M. Tomczak - edul

Dérivation complexe : sachant que les dérivées de $H(z)$ convergent dans la même région que $H(z)$, on a :

$$\frac{dH(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-n) x_n z^{-n-1} \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n x_n z^{-n} = Z[Kx_k] = -z \frac{dH(z)}{dz}$$

plus généralement : $Z[k^m x_k] = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^m H(z)$

Convolution complexe : on montre que

$$Z[x_k y_k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C v^{-1} Y(v) X(v^{-1}z) dv$$

Le contour C doit être choisi dans l'intersection des régions de convergence de $Y(v)$ et $H(z/v)$.

Déroulement rétrograde : $Z[x_{-k}] = H(z^{-1})$

Corrélation : $Z[\phi_{xy}(n)] = \Phi_{xy}(z) = H^*(1/z) Y(z)$

Limite : $Z[\lim_{a \rightarrow b} x(k, a)] = \lim_{a \rightarrow b} H(z, a)$

Transformée en z, Equations aux différences

M. Tomczak - ead

La méthode d'inversion précédente donne accès aux valeurs numériques mais ne permet pas en général d'établir l'expression analytique du signal original. Elle s'avère toutefois bien adaptée au traitement sur calculateur :

SI $X(z)$ est de la forme : $\frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}$

On a : $a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} = (1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})(x_0 + x_1 z^{-1} + \dots)$

D'où : $a_k = \sum_{i=0}^k b_i x_{k-i} = x_k + \sum_{i=1}^k b_i x_{k-i}$ Soit : $x_k = a_k - \sum_{i=1}^k b_i x_{k-i}$ avec $a_k > n = b_k > m = 0$

Relation de récurrence :

On peut aussi poser $X(z) = [A(z)/B(z)] U(z)$ avec $U(z) = 1$ et en tirer une relation de récurrence entre $x(k)$ et $u(k)$, on obtient alors les $x(k)$ en posant $u(k) = \delta(k)$. **Exemple :**

$X(z) = \frac{z}{z-0,5} \cdot U(z) \rightarrow X(z)(z-0,5) = zU(z)$ En identifiant comme précédemment suivant les puissances de z, il vient :

$x_k = 0,5x_{k-1} + u_k$ et $x_k = 0,5x_{k-1} + \delta_k$ (relation de récurrence)
d'où : $x_0 = 1 ; x_1 = 0,5 ; x_2 = 0,5^2 ; \dots ; x_k = 0,5^k$

Remarque : en pratique, on ne procède pas à l'identification, mais on utilise le théorème du retard :

$X(z)(z-0,5) = zU(z) \rightarrow X(z) - 0,5z^{-1}X(z) = U(z)$ d'où : $x_k = 0,5x_{k-1} + u_k$

Transformée en z, Equations aux différences

M. Tomczak - ead

A l'aide du théorème de Cauchy, on peut établir l'expression de la Tz inverse :

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z) z^{k-1} dz$$

Le contour fermé C doit entourer l'origine du plan des z dans le sens positif et être dans la région de convergence (il e entourer les singularités de $z^{k-1}H(z)$).

Bien que cette intégrale se calcule en général facilement par la méthode des résidus, on l'utilise peu fréquemment. D'autres techniques permettent d'effectuer l'inversion, en particulier la **décomposition en éléments simples**. On passe à présent en revue certaines d'entre elles, mais en se limitant délibérément au cas de la Tz moléculaire (et donc de signaux causaux).

Développement par division :

Lorsque $X(z)$ se présente sous la forme d'une fraction rationnelle, ce qui est le cas le plus fréquent en pratique, on peut effectuer la division suivant les puissances croissantes de z^{-1} . Les coefficients de la série en z^{-1} obtenue sont les valeurs du signal $x(k)$. **Exemple :**

$$\frac{z^2 - 5z}{-z^2 + 6z - 8} = \frac{-2 - 8z^{-1}}{-z + 6 - 8z^{-1}} = \frac{-2 - 8z^{-1} + 16z^{-2}}{-20z^{-1} + 16z^{-2}} \dots$$

$$X(z) = \frac{z^2 - 5z}{z^2 - 6z + 8} = \frac{z^2 - 6z + 8}{1 + z^{-1} - 2z^{-2} - 20z^{-3}} \dots$$

$x(0) = 1, x(1) = 1, x(2) = -2, x(3) = -20, \dots$

Transformée en z, Equations aux différences

M. Tomczak - ead

Décomposition en éléments simples :

Le principe est exactement le même que pour la TL, on cherche des éléments simples présents dans la Tz, ou bien on peut utiliser le tableau suivant :

Pôles de $X(z)$	Élément simple	Original $x(k) (k \geq 0)$
réel simple $z_1 = p$	$\frac{z}{z-p} = \frac{1}{1-pz^{-1}}$	p^k
réel double $z_1 = z_2 = p$	$\frac{zp}{(z-p)^2} = \frac{pz^{-1}}{(1-pz^{-1})^2}$	$k p^k$
complexes conjugués $z_{1,2} = \alpha \pm j\beta = \rho e^{\pm j\theta}$ $\alpha = \rho \cos \theta ; \beta = \rho \sin \theta$	$\frac{z(z-\alpha)}{(z-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1 - \alpha z^{-1}}{\rho^2 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}$ $\frac{z\beta}{(z-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{\beta z^{-1}}{\rho^2 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}$	$\rho^k \cos(k\theta)$ $\rho^k \sin(k\theta)$

Remarques : l'examen de ce tableau montre qu'il est souvent judicieux de décomposer $X(z)/z$ (lorsqu'on travaille en puissances de z positives). Par ailleurs, de même que pour la TL, on utilise la linéarité de la Tz ainsi que le théorème du retard.

Transformée en z, Equations aux différences

M. Tomczak - ead

De même que la TL dans le cas des équations différentielles, la Tz permet de résoudre les équations aux différences linéaires à coefficients constants. Exemple :

$$x_{k+1} + 2x_k = 1_k ; x_0 = 1 \xrightarrow{Tz} zX(z) - zx_0 + 2X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\text{Soit : } X(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)} + \frac{z}{z+2} = \frac{1}{3} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{2}{3} \frac{z^{-1}}{1+2z^{-1}} + \frac{1}{1+2z^{-1}}$$

$$\text{D'où : } x_k = \frac{1}{3} 1_{k-1} + \frac{2}{3} (-2)^{k-1} 1_{k-1} + (-2)^k 1_k ; x_1 = -1 ; x_2 = 3 ; \dots$$

Remarque : lorsque l'équation se présente avec des indices $\leq k$, il faut utiliser une version modifiée du théorème du retard monolatère (voir p.40), de façon à pouvoir prendre en compte les conditions initiales :

$$Z[x_{k-m}] = z^{-m} \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n-m} z^{-(n-m)} = z^{-m} \sum_{i=-m}^{+\infty} x_i z^{-i} = z^{-m} \left(X(z) + \sum_{i=-m}^{-1} x_i z^{-i} \right) = z^{-m} X(z) + \sum_{i=1}^m x_{-i} z^{i-m}$$

Exemple : $x_k + 2x_{k-1} = 1_k ; x_{-1} = 1 \xrightarrow{Tz} X(z) + 2(z^{-1}X(z) + x_{-1}) = \frac{1}{1-z^{-1}}$

$$\text{Soit : } X(z) = \frac{1}{3} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{2}{3} \frac{1}{1+2z^{-1}} - \frac{2}{1+2z^{-1}} \text{ D'où : } x_k = \frac{1}{3} 1_k - \frac{4}{3} (-2)^k 1_k ; x_0 = -1 ; x_1 = 3 ; \dots$$

INTRODUCTION

Jusqu'à présent, on a distingué les signaux à temps continu des signaux à temps discret. Bien que ces derniers puissent être d'origines diverses (signaux intrinsèquement discrets, séries chronologiques, etc.), la plupart sont obtenus par échantillonnage, c'est à dire prélevement régulier ou non de valeurs ponctuelles (échantillons), de signaux continus.

Le cas le plus fréquent, et celui qui nous intéresse, est celui de l'échantillonnage régulier ou périodique, l'intervalle de temps entre échantillons successifs noté T_e (ou T) est appelé période ou pas d'échantillonnage.

L'échantillonnage constitue en fait une étape du processus de numérisation de signaux analogiques appelé conversion analogique / numérique (A / N). Une telle opération est nécessaire dès que l'on souhaite traiter des signaux analogiques à l'aide d'un dispositif numérique (ordinateur, processeur de traitement du signal, etc.).

Le signal numérique obtenu à l'issue de ce traitement doit souvent être transformé à nouveau en signal analogique, on parle alors de conversion numérique / analogique (N / A).

Lorsqu'un signal est échantillonné, il y a lieu de savoir si cette transformation doit être réversible ou non. Or, bien que possible en théorie, la reconstitution (ou la reconstruction) parfaite d'un signal est soumise à certaines conditions, impossibles à vérifier en pratique. Ce problème est connu sous le nom de théorème d'échantillonnage ou de Shannon.

On verra dans un chapitre ultérieur comment la distorsion et la perte d'information liées à l'échantillonnage peuvent être limitées à un niveau acceptable par un choix judicieux de T_e et par l'utilisation de filtres anti-repliement et de systèmes de reconstruction adéquats.

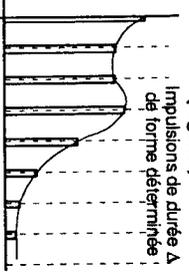
Signaux échantillonnés

M. Tomczak - csl

SIGNAUX 4. NUMERISATION (suite)

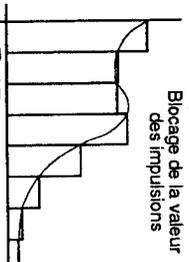
ECHANTILLONNAGE (régulier)

Impulsions de durée Δ de forme déterminée



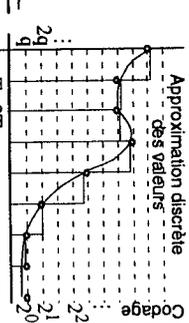
MEMORISATION (analogique)

Blocage de la valeur des impulsions



QUANTIFICATION (uniforme)

Approximation discrète des valeurs



L'opération de quantification (uniforme ou non) est une transformation non-linéaire. Sans entrer dans des considérations de bruit de quantification (modèle stochastique des erreurs introduites par la conversion A/N), on peut tout de même calculer l'erreur relative théorique de quantification ϵ_q . Pour simplifier, on suppose le pas de quantification $q = 1$ et on considère un signal analogique $x(t)$ représenté par la grandeur D à valeurs entières :

La valeur maximale de D doit correspondre à la valeur maximale que peut prendre le signal analogique dans les cas extrêmes de fonctionnement.

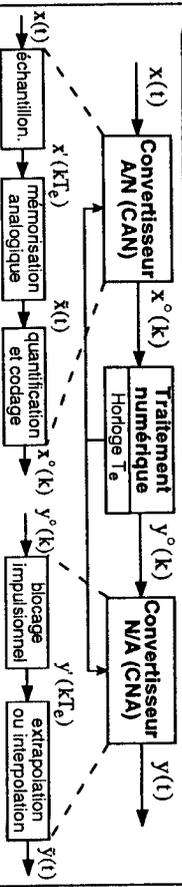
$$\epsilon_q = \frac{\Delta x}{x_{\max}} = \frac{1}{2^r - 1}$$

En pratique, on s'arrange pour avoir une quantification suffisamment fine pour pouvoir négliger l'erreur introduite et le caractère non-linéaire. Dans ce cas, on peut poser $x'(kT_e) = x^c(k)$.

Signaux échantillonnés

M. Tomczak - csl

Schéma de principe d'un système de traitement numérique de signaux analogiques



Le CAN fait correspondre au signal analogique $x(t)$ une suite de nombres $x^c(k)$ (signal numérique) généralement codés sous forme binaire. Chaque nombre correspond à l'amplitude $x^c(kT_e)$ d'un échantillon du signal prélevé à l'instant d'échantillonnage kT_e (signal échantillonné). L'obtention de ce nombre n'étant pas immédiate, on procède couramment à une mémorisation de la valeur analogique (on parle aussi de blocage ou maintien) entre deux mémorisations successives. Bien que, du fait de la nature analogique de $x(t)$, les échantillons $x^c(kT_e)$ puissent prendre une infinité de valeurs, le signal numérique $x^c(k)$ aura la plus proche valeur tirée d'un assortiment fini de valeurs discrètes : c'est la quantification, un signal numérique est donc à la fois à temps et à amplitude discrets. Le plus souvent, la quantification est uniforme.

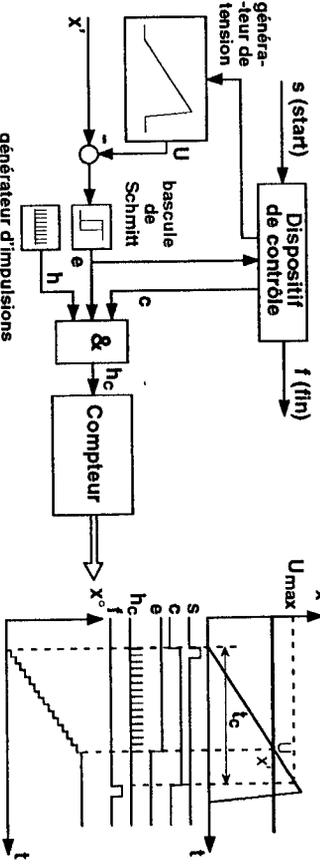
Lors de la CNA, la suite de nombres $y^c(k)$ est tout d'abord transformée en une suite d'échantillons $y^c(kT_e)$ à amplitudes discrètes (cette opération de transformation nombre/amplitude est modélisée par un blocage impulsif comparable à un échantillonnage), puis le signal de sortie est obtenu par une opération d'extrapolation ou d'interpolation d'ordre 0, qui est réalisée en maintenant souvent, on se contente d'un extrapolateur (ou bloqueur) d'ordre 0, qui est réalisé en maintenant simplement $y^c(kT_e)$ constant pendant la conversion, suivi éventuellement d'un filtre de lissage.

Signaux échantillonnés

M. Tomczak - csl

SIGNAUX 4. CONVERTISSEURS AN

On distingue généralement 3 gammes de CAN, suivant leur rapidité, mesurée par le temps de conversion t_c : les très rapides (t_c de 1 à 2 μ s), les rapides (t_c de 10 à 100 μ s) et les convertisseurs à intégration (t_c de 20 à 40 ms). En général, plus la conversion est rapide, plus le prix est élevé ! Parmi les différents types de CAN (à pondération, à double pente, tension/fréquence, etc.), le plus courant est le convertisseur rapide à dent de scie ou à rampe :

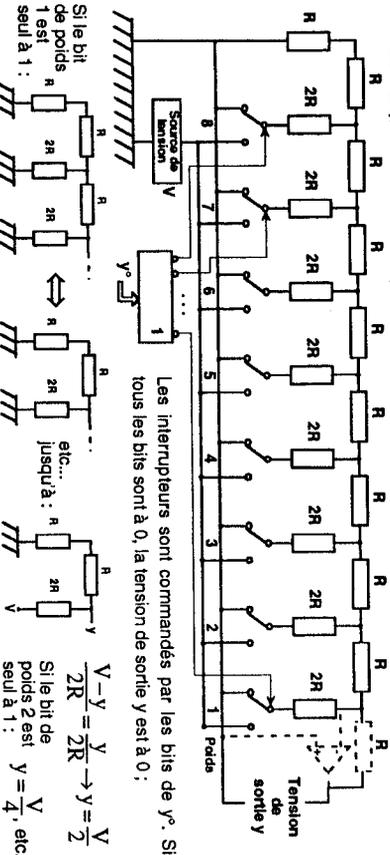


La tension U en rampe est comparée à la tension x' à convertir : $e = 1$ tant que $x' > U$ et passe à 0 dès que $U > x'$. Le signal logique $c = 1$ pendant le temps de conversion. Si e est à 1, la porte ET laisse alors passer les impulsions d'horloge qui sont ensuite décomposées. Le processus est surveillé par un dispositif de contrôle, qui reçoit l'impulsion de départ s du bloc de contrôle de l'entrée analogique et lui délivre l'impulsion de fin f lorsque U atteint la valeur maximale. Il est à noter que le signal à convertir est supposé constant ou en tout cas varier moins que le pas de quantification q pendant la conversion.

Signaux échantillonnés

M. Tomczak - csl

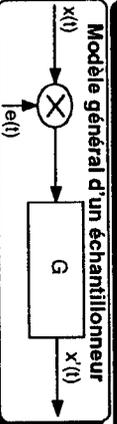
La conversion N/A est toujours liée à une mémorisation (extrapolation d'ordre 0) qui est généralement réalisée au niveau numérique (registre tampon de la sortie analogique). Lors d'une reconstruction plus élaborée (interpolation) est réalisée, elle s'effectue numériquement et le blocneur d'ordre 0 de sortie est alors sollicité à une fréquence plus élevée (suréchantillonnage). Dans tous les cas, le blocneur d'ordre 0 (c'est à dire en fait le convertisseur) peut être suivi d'un filtre de lissage analogique afin d'atténuer les hautes fréquences indésirables (variation en entrées pondérées (ici à réseau R-2R), dont le schéma de principe est le suivant :



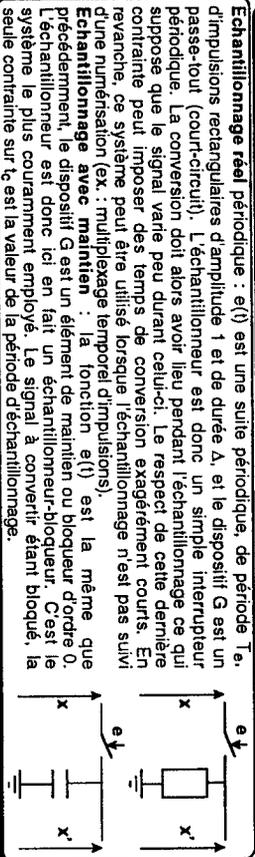
Signaux échantillonnés

D'après ce qui précède, un signal échantillonné est constitué physiquement par une suite régulière d'impulsions, où chaque impulsion indique la valeur, durant un court laps de temps, du signal analogique. Suivant le cas, cette valeur est fournie soit par la hauteur de l'impulsion (c'est le cas dans les schémas précédents, et du reste c'est le plus fréquent), soit également par sa durée ou sa position par rapport à une référence.

Dans le premier cas, on parle d'échantillonnage par multiplication, dont le principe est résumé sur le schéma suivant. Les impulsions sont de durée constante $\Delta < T_e$. Le signal est multiplié par une fonction d'échantillonnage $e(t)$ et le résultat est éventuellement mis en forme à l'aide d'un dispositif G.



Modèle général d'un échantillonneur
Suivant la forme de la fonction d'échantillonnage et le type de mise en forme, on obtient différents types d'échantillonnage. En pratique, l'échantillonneur est constitué d'un interrupteur analogique commandé par un signal logique.



Signaux échantillonnés

Echantillonnage avec moyennage : aussi petite que soit la durée Δ , ce n'est pas $x(kT_e)$ qui est numérisé, mais une certaine fonction de $x(t)$ entre les instants $kT_e - \Delta$ et kT_e . Une bonne approximation est obtenue en supposant que le signal $x(t)$ est filtré au préalable à l'aide d'un circuit moyenneur (moyenne sur durée Δ), et que $e(t)$ est un peigne de Dirac.

Echantillonnage idéal :

Enfin, l'échantillonnage idéal (ou de Dirac), moins réaliste, mais bien plus commode sur le plan de l'analyse des signaux et des systèmes échantillonnés, consiste à envisager les impulsions comme des impulsions de Dirac. Cette approximation de la réalité suppose que la durée $\Delta \ll T_e$. La fonction d'échantillonnage est donc un peigne de Dirac :

$$e(t) = \delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

$$x'(t) = x(t)e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

Un signal échantillonné idéal est donc un train d'impulsions modulées en amplitude par le signal continu. Dans ce cas, la mesure de l'impulsion, qui est la valeur à numériser, est bien égale à la valeur du signal analogique à l'instant d'échantillonnage. Dès lors, si l'on néglige la quantification, le signal numérisé est constitué des valeurs numériques du signal analogique aux instants d'échantillonnage :

$$x^o(k) = x'(kT_e) = x(kT_e)$$

Remarque : Un problème peut alors se poser lorsque le signal $x(t)$ présente une discontinuité à l'instant d'échantillonnage kT_e . On convient dans ce cas que la valeur échantillonnée est celle juste après la discontinuité : $x'(kT_e) = x(kT_e + \epsilon)$.

Signaux échantillonnés

Pour parfaire notre connaissance des signaux échantillonnés idéalisés, il nous reste à étudier leur différentes transformées, ainsi que les liens avec les transformées des signaux continus et discrets.

Liens entre les transformées en z de $x^o(k)$, $x'(t)$ et $x(t)$:

La quantification étant négligée, et l'échantillonnage étant idéal, on a $x^o(k) = x(kT_e) = x'(kT_e)$, et par conséquent, d'après la définition de la Tz, il est clair, que du point de vue mathématique, on peut confondre leur transformées respectives :

$$H^o(z) = H'(z) = H(z)$$

Liens entre les transformées de Fourier de $x^o(k)$ et $x'(t)$:

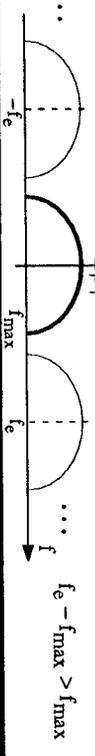
De même, d'après la définition de la TF d'un signal discret, on a immédiatement :

$$X^o(f) = X'(f)$$

Lien avec la transformée de Fourier de $x(t)$:

$$X'(f) = \mathcal{F}\{x'(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) * \delta_{T_e}(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)\} = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)$$

Ainsi, le spectre du signal échantillonné est-il obtenu par périodisation du spectre du signal d'origine. Ceci a des conséquences importantes : si le signal n'est pas à support spectral borné, des recouvrements spectraux interviendront inévitablement, entraînant une perte d'information. Lorsque le support spectral est borné, le théorème de Shannon fixe la fréquence d'échantillonnage minimale évitant tout recouvrement spectral. Ainsi, s'il s'agit d'un signal basse fréquence de fréquence maximale f_{max} , on doit avoir $f_e > 2f_{max}$:



Signaux échantillonnés

En pratique, les supports spectraux ne sont jamais bornés, et il faut procéder à un pré-filtrage analogique du signal afin de limiter les recouvrements (filtres anti-repliement). Il est à noter que dans le cas des autres types d'échantillonnage, la périodisation du spectre s'accompagne de distorsions et de déphasages des raies spectrales. Ces problèmes seront abordés de façon plus approfondie ultérieurement.

Lien entre les transformées de Laplace de $x'(t)$ et $x(t)$:

D'après une propriété de la TL vue au § 2, on a :

$$L[x(t) \cdot \delta_{T_e}(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(v) \cdot \Delta_{T_e}(s-v) dv$$

A l'aide du théorème des résidus, on peut en déduire :

$$H(s) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H\left(s - j \frac{2\pi n}{T_e}\right)$$

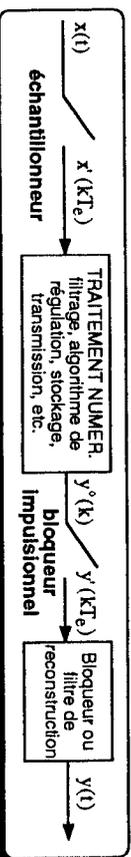
Cette relation découle également directement de la TF.

Lien entre la transformée de Laplace de $x'(t)$ et $H(z)$:

$$\begin{aligned} H(s) &= L \left[x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \right] = L \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-nTs} = H(z) \Big|_{z=e^{sT_e}} \end{aligned}$$

La TL d'un signal échantillonné idéalisé est égale à la Tz du signal évaluée pour $z = \exp(sT_e)$.

Le bloqueur impulsionnel introduit précédemment permet de modéliser une opération en quelque sorte parallèle à celle de l'échantillonnage, c'est à dire la transformation d'un signal numérique en train d'impulsions modulées. Finalement, un système de traitement numérique de signaux analogiques peut être envisagé comme un système soumis en entrée à un train d'impulsions, et fournissant en sortie un train d'impulsions également, ce dernier étant ensuite "reconstruit", généralement à l'aide d'un bloqueur d'ordre 0 :



Dans un tel contexte, on parle alors de systèmes échantillonnés. Leur analyse peut s'effectuer à l'aide de la Transformée de Laplace, celle-ci étant définie pour des signaux échantillonnés, mais il est bien plus commode d'employer la Transformée en z. Ce faisant, on se prive toutefois d'une partie de l'information, en effet, la Tz est au départ adaptée aux signaux discrets. Ainsi, la modélisation obtenue est-elle parfois qualifiée de "stroboscopique", car on n'a accès qu'aux instants d'échantillonnage. Une autre solution consiste à utiliser la Transformée en z modifiée, mais celle-ci se révèle d'un usage peu pratique.

Remarque : la réalité est en fait un peu plus complexe que ce qui a été décrit dans ce paragraphe 4. Ainsi, on trouve par exemple des dispositifs de "deaditch" en sortie des CNA destinés à filtrer les parasites de commutation dus au synchronisme approximatif des interrupteurs. De même, le schéma précédent doit en réalité être modifié de façon à faire apparaître le filtre anti-repliement en amont de l'échantillonneur.