

Applications 1.

COMMANDE ANALOGIQUE

1

On se propose, dans ce chapitre, d'introduire quelques notions de base sur le problème de la commande analogique de systèmes continus monovariables. En particulier, on va s'intéresser à la commande à base de régulateurs de type **Proportionnel Intégral Dérivé (PID)**. La commande PID a une grande importance sur le plan historique, mais aussi sur le plan pratique, car présente, encore de nos jours, dans la plupart des installations industrielles automatisées (actuellement, il s'agit pour une grande part de **PID numériques**, mais le principe reste le même). Son succès s'explique par son importance historique, mais aussi par sa simplicité (facile à implanter, sous forme électronique ou logicielle, facile à comprendre, donc à maintenir et à régler) et son efficacité dans de nombreux cas. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue le fait qu'il est mal adapté dans certaines situations (systèmes à retard important, à non-minimum de phase, oscillants, ...).

Que ce soit en analogique ou en numérique, la **théorie moderne de la commande**, basée sur l'utilisation de la représentation d'état des systèmes, va bien au-delà de la commande PID. Elle offre un éventail de stratégies différentes, plus complexes, mais plus performantes, et adaptées aux situations problématiques que l'on peut rencontrer, tout en prenant en compte le cas des systèmes multivariables et la présence de bruit. La commande moderne sort donc du cadre de ce cours, dans lequel on se contente d'explorer les concepts de base, qui plus est, du point de vue monovariable uniquement.

Définitions :

La commande "control" en anglais) d'un système vise en premier lieu à amener une variable de l'installation autour d'une valeur donnée appelée **consigne**. On distingue la commande **manuelle**, avec intervention humaine. Exemples : on cherche à conduire un véhicule vers une destination donnée en toute sécurité, ou à régler la température de la douche à une température de confort. Et la commande **automatique**, assurée à l'aide d'appareillages. Exemples : régulation de température d'une pièce pilotée par un thermostat, régulation de la vitesse de rotation d'un moteur en charge à l'aide d'un régulateur de vitesse, etc.

La commande en Boucle Ouverte consiste à ajuster le signal de commande sans tenir compte de la mesure du signal de sortie. Exemples : positionner à priori les robinets d'eau chaude et d'eau froide pour préparer le bain, régler à priori la temporisation du grille-pain. Le résultat est tributaire de certains paramètres non maîtrisés (**perturbations**) comme la constance de la 1^{re} de l'eau chaude, l'épaisseur ou l'humidité de la tranche de pain, etc.

Commande analogique

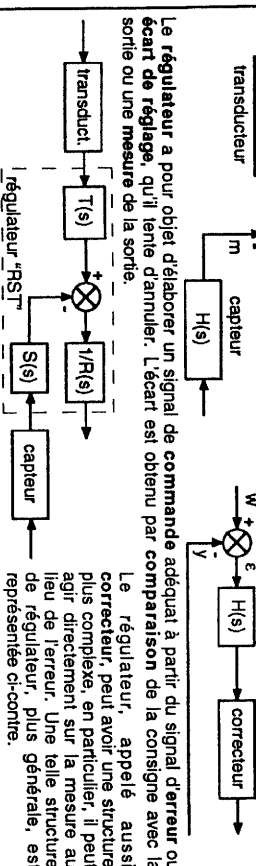
M. TONREZAK - CH&I

Applications 1.

Cde en BF, généralités (suite)

3

Commentaires :
Le signal de consigne, ou de **référence**, doit être de même nature que le signal de retour, en général il s'agit d'une grandeur électrique, qui peut être obtenue à l'aide d'un transducteur (ex : potentiomètre) :
Il n'est pas rare que les FT du transducteur et du capteur soient identiques $F(s) = H(s)$, auquel cas, on est ramené à un système à retour unitaire :



Le **régulateur** a pour objet d'élaborer un signal de commande adéquat à partir du signal d'erreur ou **écart de réglage**, qu'il tente d'annuler. L'écart est obtenu par **comparaison** de la consigne avec la sortie ou une mesure de la sortie.

Le **régulateur**, appelé aussi **correcteur**, peut avoir une structure plus complexe, en particulier, il peut agir directement sur la mesure au lieu de l'erreur. Une telle structure de régulateur, plus générale, est représentée ci-contre.

La commande agit sur le système par l'intermédiaire d'un **actionneur**, l'ensemble actionneur/système formant l'installation ou le processus. Suivant les cas, l'installation peut également comprendre le capteur. Les **perturbations** sont les grandeurs dont les variations plus ou moins aléatoires nuisent au bon fonctionnement du système. Exemples : ouverture intempestive de la porte du four précédent, pression du réseau pour une régulation de débit d'eau, charge sur un convoyeur pour la régulation de vitesse du moteur d'entraînement, ensoleillement pour la régulation de température dans une voiture, etc. Les perturbations peuvent être mesurées ou non, lorsqu'elles sont mesurées, on peut mettre en œuvre des commandes particulières qui les prennent en compte (commande par anticipation ou "feedforward"). On les modélise sous forme d'actions additives (ou soustractives) sur la sortie du système ou sur une grandeur intermédiaire.

Commande analogique

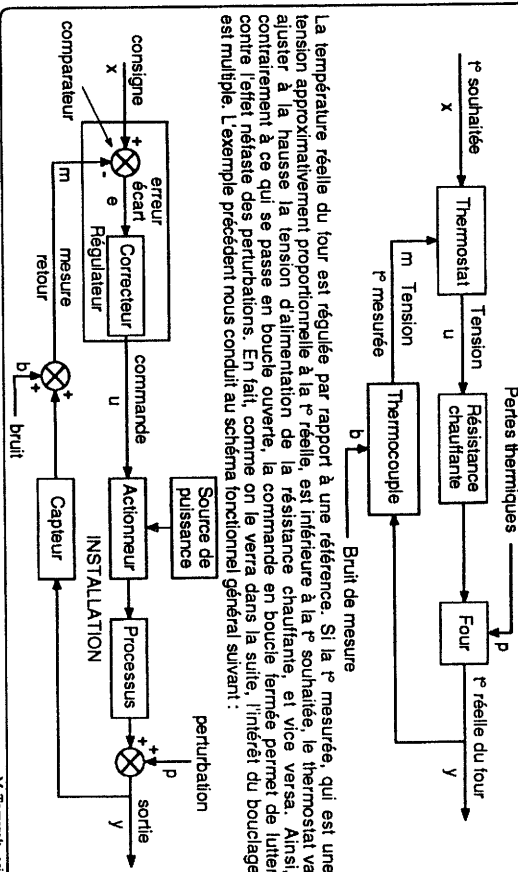
M. TONREZAK - CH&I

Applications 1.

Cde en Boucle Fermée, généralités

2

La **commande en Boucle Fermée** ("feedback control") consiste à mesurer la variable de sortie pour ajuster la variable de commande. Exemple : régulation de la température d'un four.



La température réelle du four est réglée par rapport à une référence. Si la T^o mesurée, qui est une tension approximativement proportionnelle à la T^o réelle, est inférieure à la T^o souhaitée, le thermostat va ajuster la hausse la tension d'alimentation de la résistance chauffante, et vice versa. Ainsi, contrairement à ce qui se passe en boucle ouverte, la commande en boucle fermée permet de lutter contre l'effet néfaste des perturbations. En fait, comme on le verra dans la suite, l'intérêt du bouclage est multiple. L'exemple précédent nous conduit au schéma fonctionnel général suivant :

Commande analogique

M. TONREZAK - CH&I

Applications 1.

Cde en BF, généralités (suite)

4

Le bruit constitue une perturbation particulière, qui peut être prise en compte si ses caractéristiques statistiques sont connues, mais cela suppose de recourir à une stratégie de commande stochastique. Si le Rapport Signal sur Bruit est suffisamment élevé, on peut négliger le bruit et se contenter d'une commande déterministe. Un exemple courant de bruit affectant les systèmes de commande est celui engendré par le milieu de mesure.

L'indication de la valeur de sortie, et donc le signal d'erreur, dépendent directement du comportement statique et dynamique du capteur, celui-ci influe, par conséquent, de façon déterminante sur les performances du système automatisé. Dans de nombreux cas pratiques, la FT du capteur est du type 1^{er} ou 2^{ème} ordre, mais, si les constantes de temps du capteur sont petites par rapport aux autres constantes de temps du système automatique, on est ramené à un simple gain. Exemples : thermocouple (2^{ème} ordre aperiodique), dynamo tachymétrique (gain K_t).

Objectifs de la commande en boucle fermée :

- Ajuster le signal de commande de manière à annuler l'écart entre consigne et sortie (**précision**).
- Stabiliser un système instable en Boucle Ouverte (ex : navire soumis au courant), ou simplement garantir un bon **amortissement** du système bouclé (**stabilité**).
- Améliorer le temps de réaction du système par rapport à la commande en BO (**rapidité**).
- Rejeter les perturbations externes non-mesurées, compenser les perturbations externes mesurées.
- Éviter de transmettre les bruits de capteurs aux actionneurs, donc aux sorties.
- Prendre en compte les incertitudes internes (modèle du système, non-linéarités, vieillissement, caractéristiques des perturbations et bruits, etc.), de façon à compenser d'éventuelles conséquences sur la stabilité et sur les performances de la commande, minimiser la **sensibilité** du système à des variations de paramètres (**robustesse**).
- Éviter des lois de commande trop brutales pour les actionneurs, trop coûteuses en énergie ou trop compliquées à mettre en œuvre.
- Contrôler au système des caractéristiques imposées, par exemple, la forme de la réponse à une sollicitation (consigne ou perturbation) donnée.

Commande analogique

M. TONREZAK - CH&I

Applications 1. Cde en BF, généralités (fin)

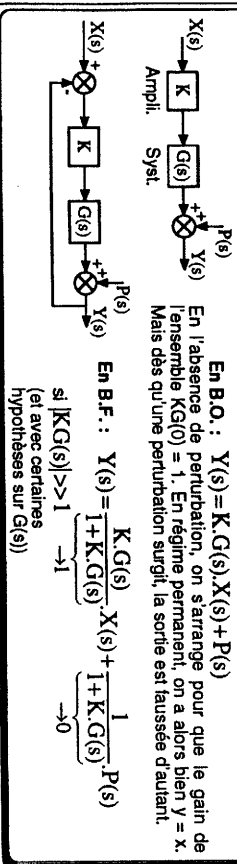
5

Remarque : Les objectifs pour/suivis sont multiples, et certains sont antagonistes (ex. : diémes stabilité/précision et amortissement/rapidité). Il s'agit alors d'assurer le meilleur compromis possible. C'est la recherche du compromis entre précision et dynamique satisfaisante (rapidité et amortissement) qui a conduit originellement à la commande de type PID.

De manière générale, on dit aussi qu'un bon système de commande doit assurer simultanément deux fonctions distinctes : la **régulation** et l'**asservissement**. La régulation consiste à rejeter ou compenser l'effet, sur la sortie, des perturbations, et ce, en régime permanent, c'est à dire pour une consigne fixe ou variant lentement par rapport aux constantes de temps du système (Ex. : alimentation courant ou tension stabilisée, pilote automatique d'avion, ...). Au contraire, le problème de l'asservissement est la poursuite, par la sortie, d'une consigne qui évolue constamment. Dans ce cas, le correcteur est parfois appelé **servomécanisme** (Ex. : table traçante, radar de poursuite, ...).

Avantages sur la commande en Boucle Ouverte :

Compensation de perturbations (exemple) :



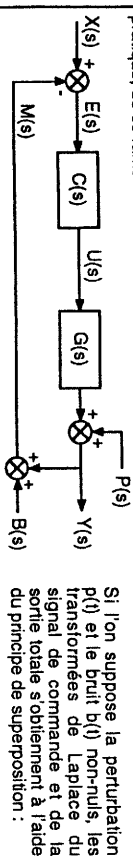
Commande analogique

M. Tomiczak - cslab

Applications 1. Formulation générale du problème

7

Tentons à présent de généraliser les différents concepts introduits précédemment. Afin de simplifier les diverses expressions, on considère le cas d'un retour unitaire, auquel il est toujours possible, en pratique, de se ramener.



$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} [X(s) - B(s)] + \frac{1}{1 + C(s)G(s)} P(s) \quad U(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)} [X(s) - B(s) - P(s)]$$

FTBF : $R(s)$

On peut aussi en déduire la TL de l'erreur réelle $e(t) = x(t) - y(t)$ (NB : $e(t) \neq e(t)$) :

$$e(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} [X(s) - P(s)] + \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} B(s)$$

Quelques définitions :

Transfère de boucle : $H(s) = C(s)G(s)$ (FTBO)

Différence de retour : $L(s) = 1 + H(s) = 1 + C(s)G(s)$

FTBF : $F(s) = H(s) / L(s)$

Fonction de sensibilité : $\Sigma(s) = 1 / (1 + C(s)G(s)) = 1 / L(s)$

Fonction de sensibilité complémentaire : $F(s)$ car $F(s) = 1 - \Sigma(s)$

Finalement, on peut réécrire les relations précédentes :

Sortie : $Y = F \cdot (X - B) + \Sigma \cdot P$
 Commande : $U = C \cdot \Sigma \cdot (X - B - P)$
 Erreur réelle : $e = \Sigma \cdot (X - P) + F \cdot B$

Commande analogique

M. Tomiczak - cslab

Applications 1. Avantages de la Cde en BF (suite)

6

Baisse de la sensibilité à des variations de paramètres (exemple) :



Dans le cas de la commande en BO, chaque composant du système doit être conçu et choisi avec soin pour avoir une réponse très précise. En Boucle Fermée, le niveau de précision requis peut être moins important, car la sensibilité aux variations de paramètres de $G(s)$ est réduite d'un facteur $1 + G(s)$. Pour illustrer ceci, supposons que, suite par exemple à un vieillissement ou un échauffement, la FT $G(s)$ subit une petite variation :

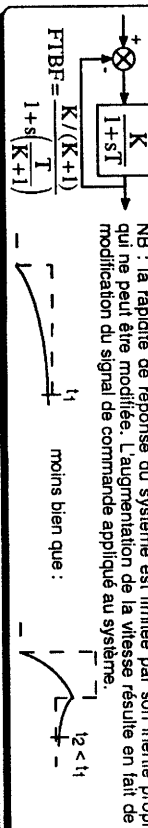
$$G(s) \rightarrow G(s) + \Delta G(s), \text{ avec } |G(s)| \gg |\Delta G(s)|$$

En BO, la sortie est alors donnée par : $Y(s) + \Delta Y(s) = [G(s) + \Delta G(s)]X(s)$ i.e. $\Delta Y(s) = \Delta G(s)X(s)$

En BF, la sortie s'écrit : $Y(s) + \Delta Y(s) = \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + G(s) + \Delta G(s)} X(s)$, soit : $\Delta Y(s) = \frac{\Delta G(s)}{1 + G(s)} X(s)$

Ainsi, la variation de la sortie est diminuée d'un facteur $1 + G(s)$, dont le module est très supérieur à 1 dans de nombreux cas pratiques.

Augmentation de la rapidité i.e. diminution des constantes de temps (exemple) :



NB : la rapidité de réponse du système est limitée par son inertie propre, qui ne peut être modifiée. L'augmentation de la vitesse résulte en fait de la modification du signal de commande appliqué au système.

Commande analogique

M. Tomiczak - cslab

Applications 1. Formulation du problème (suite)

8

Fonctions de sensibilité : On l'a déjà évoqué précédemment, un système, de quelque nature qu'il soit, est sujet à des variations : environnement, vieillissement, connaissance incomplète des paramètres qui décrivent son fonctionnement, etc. La sensibilité d'un système de commande aux erreurs de modèle est définie comme le rapport entre le taux de variation de la FTBF et le taux de variation de la FT du système à commander (Bode) :

$$\Sigma = \frac{\Delta F(s)}{F(s)} = \frac{F(s)}{\Delta G(s)G(s)}$$

A la limite, pour de petites variations additives :

$$\Sigma = \frac{\partial F}{\partial G} = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln G}$$

Il est clair que pour un système en boucle ouverte, $\Sigma = 1$.

Dans le cas du schéma-bloc précédent, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{\partial F}{\partial G} = \frac{G}{\partial G} \frac{\partial}{\partial G} \left(\frac{CG}{1 + CG} \right) = \frac{G}{F} (C(1 + CG)^{-1} - CGC(1 + CG)^{-2}) \\ &= \frac{G}{F} (1 + CG)^{-2} (C(1 + CG) - CGC) = \frac{CG}{F} (1 + CG)^{-2} = \frac{CG(1 + CG)^{-2}}{CG(1 + CG)^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 + CG} \end{aligned}$$

Σ représente également la sensibilité aux perturbations P . Les fonctions de sensibilité Σ et F renseignent sur les performances de la loi de commande (précision, rejet des perturbations, immunité aux bruits, immunité aux erreurs de modèle) et peuvent donc être utilisées pour formuler les différents objectifs que doit atteindre la loi de commande. La synthèse de la loi de commande peut ainsi s'appuyer sur cette formulation.

Commande analogique

M. Tomiczak - cslab

Applications 1. Formulation du problème (suite)

9

Synthèse de loi de commande : Il s'agit de choisir la structure et les paramètres du correcteur de façon judicieuse. Rappelons tout d'abord les relations établies auparavant :

$$Y = F(X - B) + \Sigma P ; \quad e = \Sigma(X - P) + F B ; \quad U = C \Sigma(X - B - P)$$

Considérons, en premier lieu, le problème de minimisation de l'erreur (précision). En fonctionnement normal (pas de perturbation ni de bruit), la première relation montre qu'on doit avoir F proche de 1. Ceci peut être assuré en choisissant une F (C) adéquate pour le correcteur. Dans ce cas, Σ est petite et, d'après la seconde relation, l'erreur est limitée au bruit.

Soit, à présent, le problème du rejet des perturbations. La première relation montre clairement que Σ doit être petite, ce qui est en parfaite adéquation avec les contraintes précédentes.

Bien sûr, le fait de fixer Σ petite permet également de limiter la sensibilité du système de commande aux erreurs de modèle.

Toutefois, si l'on s'intéresse au problème du filtrage du bruit, on constate, au vu de la deuxième relation, que F doit être fixé le plus petit possible (et donc Σ proche de 1) !!

Pour résoudre ce conflit, et étant donné que le bruit se manifeste généralement pour l'essentiel en haute fréquence, on adopte le compromis suivant : F petite en haute fréquence et Σ petite en basse fréquence.

Illustration : supposons que $C(s) = K_0$ et $G(s) = K$. On a dans ce cas les relations suivantes :

$$Y(s) = \frac{K_p K}{1 + K_p K} (X(s) - B(s)) + \frac{1}{1 + K_p K} P(s)$$

Dans ce cas particulier (gains uniquement), la relation temporelle est de la même forme.

Si l'on néglige la présence de bruit, on doit avoir $K_0 \rightarrow \infty$. Alors, $y(t) \rightarrow x(t)$ quelque soit K , et l'influence de la perturbation est minimisée. Toutefois, ceci pose un certain nombre de problèmes : saturation du signal de commande affectivement appliqué (actionneurs saturés), effet du bruit négligé, et augmentation des risques d'instabilité. Ce dernier point est représentatif du problème connu sous le nom de dilemme stabilité/précision. Le plus grand risque d'instabilité peut se comprendre intuitivement : K_0 étant très grand, une petite erreur peut suffire à entraîner une commande u disproportionnée. La sortie y peut alors dépasser x dans l'autre sens, ce qui provoque à nouveau une commande trop forte, etc. Le système peut osciller à la recherche d'un équilibre difficile à trouver (phénomène de pompage).

Commande analogique

M. Tomiczak - csl

Applications 1. Notion de correction (suite)

11

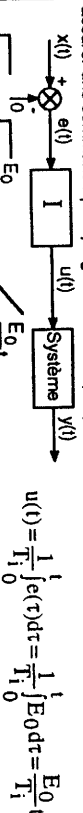
Correction Proportionnelle Dérivée : On peut encore améliorer la correction précédente. Reprenons l'exemple du chauffage. Si à un instant donné, la température de la pièce est inférieure à la T^0 consigne, l'erreur est positive, il faut donc chauffer et envoyer une commande u appropriée. Mais cette dernière doit être différente selon que l'erreur est en train d'augmenter ou de diminuer : il faut bien sûr chauffer plus si l'erreur augmente encore. De plus, il faudrait agir en rapport avec la vitesse de variation de l'erreur : une augmentation rapide appelle une action plus énergique. Pour cela, on introduit la dérivée de l'erreur dans la loi de commande :

$$u(t) = K_p \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Ainsi, si $e(t)$ diminue, la dérivée est négative et donc $u(t)$ diminue également, et vice versa. Le paramètre T_d , parfois appelé simplement constante de dérivation, représente en fait le temps d'action dérivée (secondes).

L'action D a un effet d'anticipation, on peut considérer qu'elle prédit, à l'instant t , la valeur que prendra l'erreur à l'instant $t + T_d$ (par interpolation linéaire). Ceci a pour conséquence d'améliorer l'amortissement, donc la stabilité du système. Ce faisant, elle permet d'augmenter la rapidité du système, en jouant sur les autres paramètres (ici K_p plus grand).

Correction Proportionnelle Intégrale : Parfois, on rajoute un terme proportionnel à l'intégrale de l'erreur. Ainsi, lors d'une variation de consigne importante (par exemple au démarrage), l'erreur est très grande, et une commande proportionnelle peut conduire à la saturation de la commande. On peut alors assurer une commande plus progressive. Exemple (en boucle ouverte) :



Le temps d'action intégrale T_1 , inversement proportionnel à l'action intégrale, doit être choisi de l'ordre de la constante de temps dominante du système à commander. Si T_1 est trop petit, la commande augmente trop vite, au contraire, si T_1 est trop grand, le démarrage est trop mou.

Commande analogique

M. Tomiczak - csl

Applications 1. Notion de correction

10

On a déjà vu que le rôle du correcteur est d'élaborer, à partir du signal d'erreur ou de la consigne et de la mesure, le signal ou la loi de commande à délivrer aux actionneurs.

Correction Totale Ou Rien : La commande la plus simple est du type TOR : si l'erreur e est positive i.e. la sortie y est inférieure à la consigne x , on envoie une commande u maximum. Au contraire, si $e < 0$, i.e. si $y > x$, on envoie $u = 0$ ou un minimum. Une telle loi de commande est utilisée pour les systèmes logiques à forte inertie.

Exemples : appareil de chauffage à thermostat, régulation de niveau dans une cuve (celle-ci étant par exemple équipée de 2 détecteurs de niveau, max et min).

Correction Proportionnelle : on peut améliorer le principe précédent, on envoie toute la puissance lorsqu'on est loin du but poursuivi, mais on essaie de réduire au fur et à mesure qu'on s'en approche. C'est la loi de commande proportionnelle $u(t) = K_p \cdot e(t)$.

Exemple : Régulation de température dans une pièce. La température θ d'une pièce est fonction de la T^0 de l'eau chaude envoyée dans le radiateur. Par expérience, l'habitant sait qu'il obtient un résultat satisfaisant ($\theta_{ref} = 19^\circ C$) en fixant par exemple $T = 60^\circ C$. Il sait également qu'en fonction de certaines perturbations (température extérieure, rayonnement solaire, ...), il devra modifier cette valeur (l'augmenter si par exemple θ_{ext} décroît). Une première tentative de réglage automatique de T consiste à réaliser une loi de commande proportionnelle telle que $T = K_p \cdot (\theta_{ref} - \theta)$ (et arrêt du chauffage de l'eau si $\theta > \theta_{ref}$). Comme attendu, lorsque la température θ baisse, T augmente.

Avec une commande proportionnelle, si le gain K_p est grand, on obtient une correction énergétique et rapide, mais il y a risque de dépassement et d'oscillations. En revanche, si K_p est petit, la correction est plus molle et lente mais présente moins de risque d'instabilité.

Remarque : en pratique, l'amplitude du signal de commande u est limitée soit par la saturation des amplificateurs soit par limitation volontaire à la puissance nominale admissible par les actionneurs. Ainsi, au delà d'une certaine erreur maximale, u augmente plus. La plage d'erreur dans laquelle la commande u reste égale à $K_p \cdot e$ est appelée Bande Proportionnelle (BP), et est inversement proportionnelle au gain : $BP = u_{max} / K_p$.

Commande analogique

M. Tomiczak - csl

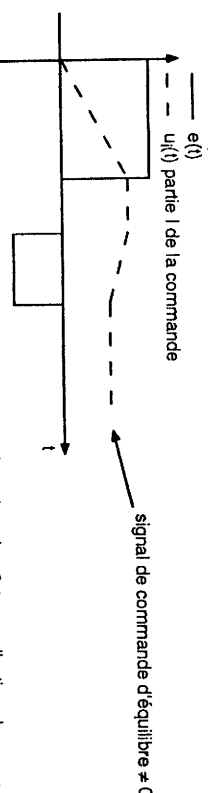
Applications 1. Notion de correction (suite)

12

Correction Proportionnelle Intégrale (suite) : En pratique, l'action intégrale est associée à l'action proportionnelle. On obtient alors une loi de commande PI :

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_1} \int_0^t e(\tau) d\tau \right)$$

L'objectif essentiel du régulateur PI est d'assurer la précision du système en présence de sollicitations (consignes et/ou perturbations) constantes, c'est à dire d'annuler l'écart de réglage en régime permanent. Ceci est rendu possible par le fait que le signal de commande issu d'un correcteur PI n'est pas forcément nul lorsque l'erreur est nulle. Illustration :



Les régulateurs existants sont des correcteurs PID, associant donc les 3 types d'action. La correction PID est de loin la plus employée (90 % des régulations industrielles) mais dans de nombreux cas, l'action dérivée est mise à zéro ($T_d = 0$). Le réglage des paramètres (gain proportionnel et temps d'action dérivée et intégrale) peut s'effectuer à l'aide de diverses méthodes, empiriques ou théoriques. On verra par la suite qu'il existe plusieurs structures de correcteurs PID. Sur le plan de la réalisation, un correcteur PID analogique, électronique est un filtre analogique construit à l'aide d'amplificateurs opérationnels montés en amplificateurs, intégrateurs et dérivateurs.

Commande analogique

M. Tomiczak - csl

Applications 1.

Stabilité : critère de Nyquist

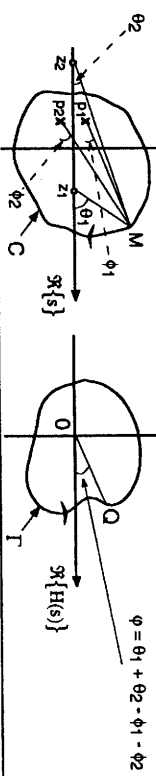
13

Lorsqu'un processus, lui-même stable, est commandé par une boucle d'asservissement, il peut arriver que le système bouclé obtenu ne soit pas stable. Il y a alors apparition d'oscillations incontrôlables. Avant de relier une boucle, il est donc indispensable de bien connaître les conditions de stabilité. On peut utiliser le critère de Routh, mais celui-ci rend difficilement compte de la robustesse de la stabilité. Il peut être judicieux d'utiliser un critère de stabilité graphique : le critère de Nyquist.

Théorème : Soit un contour fermé C quelconque dans le plan de la variable complexe s, et une fonction $H(s)$, exprimée sous forme d'une fraction rationnelle (H est holomorphe) et possédant Z_1 zéros et P_1 pôles dont Z zéros et P pôles à l'intérieur de C (comptés avec leur multiplicité) : Soit Γ le contour fermé décrit par le point Q d'abscisse $H(s)$ quand le point M, d'abscisse s, décrit le contour C. Si M parcourt C une fois dans un sens donné, le point Q fait Z - P tours dans le même sens autour de l'origine.

Ce théorème se démontre dans le cas général en appliquant le théorème des résidus à H/H pour le lacet C. Dans le cas particulier des fractions rationnelles, la démonstration est plus simple. En effet :

$$\angle H(s) = \sum_{i=1}^Z \angle(s - z_i) - \sum_{k=1}^P \angle(s - p_k) \quad \text{et} \quad \angle(s - z_i) = \text{angle entre } \overline{z_i M} \text{ et l'horizontale.}$$



Commande analogique

Applications 1.

Stabilité : critère de Nyquist (suite)

15

Un système, dont la FTBO a P pôles dans le demi-plan droit, est stable en boucle fermée si le point M d'abscisse s parcourant le contour de Bromwich, la courbe $R(s)G(s)$ tourne P fois autour du point -1 dans le sens trigonométrique.

Remarques :

- si $R(s) = K$, idem si $G(s)$ tourne P fois autour de $-1/K$ dans le sens trigonométrique.
- si des pôles sont sur l'axe imaginaire, il faut modifier C de façon à les contourner par des demi-cercles de rayon tendant vers 0.
- le diagramme de Nyquist de la boucle ouverte $R(s)G(s)$ n'est autre que la partie du lieu de Nyquist correspondant au demi-axe imaginaire positif.

Critère simplifié : critère du revers

Dans la pratique, sauf cas particulier, la structure des FTBO $R(s)G(s) = H(s)$ permet de simplifier l'application du critère de Nyquist. Tout d'abord, si la FTBO est stable, on a $P = 0$. D'autre part, si le dc du numérateur de $H(s)$ est strictement inférieur au dc du dénominateur, l'image du demi-cercle de rayon infini est réduite à l'origine. De plus, quand s décrit le demi-axe imaginaire négatif, $H(s) \rightarrow H^*(s)$, donc Γ présente une symétrie par rapport à l'axe réel. Enfin, l'image du demi-axe positif est le diagramme de Nyquist de $H(s)$.

Dans ces conditions, on peut énoncer le critère du revers :

Un système est stable en boucle fermée si son diagramme de Nyquist en boucle ouverte laisse le point critique -1 sur sa gauche lorsqu'on le parcourt dans le sens des ω croissants.

Commande analogique

Applications 1.

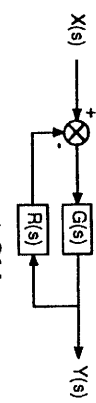
Stabilité : critère de Nyquist (suite)

14

Quand M décrit C une fois dans le sens horaire, la contribution de chaque terme $s - z_i$ à la variation de φ , argument de $H(s)$, est égale à -2π si z_i est à l'intérieur de C (le segment $z_i M$ effectue un tour), et égale à zéro si z_i est à l'extérieur (le segment n'effectue qu'une oscillation). De même pour les pôles p_k . Donc, si Z zéros et P pôles sont à l'intérieur de C, la variation totale de φ est égale à $(Z - P) \cdot (-2\pi)$, c'est à dire que Q tourne Z - P fois autour de l'origine dans le sens horaire. Dans le cas de la figure précédente, on a $Z - P = 1 - 2 = -1$, ce qui correspond à un tour dans le sens anti horaire.

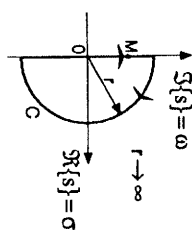
Application à l'analyse de la stabilité des systèmes bouclés :

Soit le système bouclé ci-contre, d'équation caractéristique $1 + R(s)G(s) = 0$. Celui-ci est stable si les racines (i.e les zéros) de l'équation caractéristique sont à partie réelle négative.



On choisit comme contour C le contour de Bromwich ci-contre. Celui-ci a pour image le lieu de Nyquist Γ . Soit P le nombre de pôles de $1 + R(s)G(s)$ (c'est à dire les pôles de la FTBO $R(s)G(s)$) situés à l'intérieur de C. Le système en boucle fermée sera stable si $Z = 0$, c'est à dire si N, le nombre de tours de Γ autour de 0 dans le sens horaire, est égal à -P, soit :

$$N = -P$$



Mais, dire que l'image par $1 + R(s)G(s)$ encercle N fois l'origine revient à dire que l'image par $R(s)G(s)$, i.e la FTBO, encercle N fois le point -1 (point critique). Finalement, la condition de stabilité s'énonce de la façon suivante :

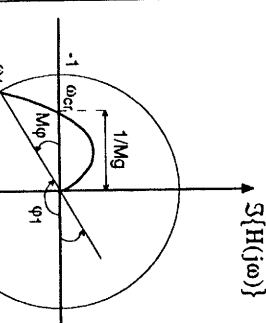
Commande analogique

Applications 1.

Marges de stabilité

16

En pratique, il ne suffit pas qu'un système de commande soit stable, il faut s'assurer de la robustesse. En effet, on observe en général une dérive des paramètres, due soit à la modification de l'environnement du système, soit à son évolution naturelle. On s'impose par conséquent une marge de sécurité en garantissant une certaine distance entre le lieu fréquentiel en boucle ouverte et le point critique. Parmi les distances couramment employées, on trouve les marges de gain et de phase, la marge de retard et la marge de module.



On repère la pulsation ω_1 telle que : $|H(j\omega_1)| = 1$
La marge de phase est alors définie par : $M\phi = \phi_1 + 180^\circ$
On repère la pulsation ω_r telle que : $\angle H(j\omega_r) = -180^\circ$
La marge de gain est alors définie par : $M_g = |H(j\omega_r)|^{-1}$

En pratique : $2 < M_g < 5$
 $6 \text{ dB} < M_g \text{ (dB)} < 14 \text{ dB}$
 $30^\circ < M\phi < 70^\circ$

Remarques :

- M_g protège d'une incertitude sur le gain statique.
- Lorsque M_g augmente, la réponse temporelle est plus amortie.
- Dans le cas général, il peut y avoir plusieurs intersections, on considère alors des marges mini et maxi.
- On constate au passage que si le gain statique du système augmente, le Nyquist "emile" et on se rapproche de l'instabilité.

Commande analogique

Applications 1.

Précision

17

On cherche à présent à établir les conditions à respecter pour assurer la précision d'un système de commande, c'est à dire la **réduction** ou mieux, l'**annulation**, de l'**écart de réglage** en régime permanent. Ces conditions ne peuvent s'établir qu'en fonction d'hypothèses sur la forme de l'entrée considérée (signal de consigne ou perturbations). Dans un premier temps, on s'intéresse au problème de l'asservissement, autrement dit, on suppose qu'il n'y a pas de perturbation. Si de plus, on néglige le bruit, les relations générales précédentes (transparents 7 et 8) s'écrivent :

$$Y = F(X - B) + \Sigma.P = F.X$$

$$E = \Sigma.(X - P) + F.B = \Sigma.X$$

On cherche à quelle condition :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s.E(s) = 0$$

On suppose que la transformée de Laplace de la consigne est de la forme :
Si $n = 0$, la consigne est une impulsion, si $n = 1$, il s'agit d'un échelon, etc.

$$X(s) = \frac{a}{s^n}$$

On a alors :

$$E(s) = \Sigma(s)X(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)} \cdot \frac{a}{s^n}$$

Or, la FTBO $C(s)G(s)$ peut s'écrire en mettant en évidence les pôles à l'origine et une FT $W(s)$ de gain statique égal à 1 ne possédant plus de pôles en $s = 0$:

$$C(s)G(s) = K \frac{W(s)}{s^r}$$

Finalement :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K \frac{W(s)}{s^r}} \cdot \frac{a}{s^n} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a.s^{r-n+1}}{s^r + K} = 0 \text{ si } r \geq n$$

De manière générale, l'erreur en régime permanent est appelée **erreur stationnaire**. Plus précisément, on parle d'**erreur statique** ou de **position** lorsque l'entrée est un échelon ($n=1$), d'**erreur de traînage** ou de **vitesse** pour une rampe ($n=2$), et d'**erreur d'accélération** pour $n=3$.

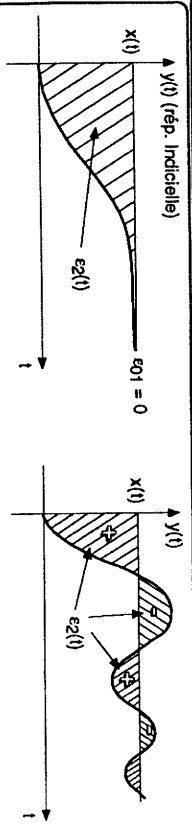
Commande analogique

M. TOMEZAK - csl

Applications 1.

Précision (suite)

19



Si l'on veut que e_{02} soit nulle, il faut que l'intégrale de $e_1(t)$ puisse s'annuler, ce qui implique la présence d'oscillations afin que les surfaces positives et négatives se compensent.

Influence des perturbations : On a examiné le problème de l'asservissement, il nous reste à étudier le cas de la régulation. On suppose donc à présent la consigne nulle, et on se propose d'établir les conditions pour que l'erreur permanente soit nulle, ou, ce qui ici revient au même, pour que la sortie $y(t)$ permanente soit nulle. Pour ce faire, on considère une perturbation de la forme $P(s) = a/s^r$. Bien sûr, dans la réalité, les perturbations sont généralement aléatoires, cette modélisation permet toutefois de dégager des conclusions pratiques. On a dans ce cas :

$$Y(s) = F(s)(X(s) - B(s) + \Sigma(s)P(s)) \text{ soit, si l'on néglige le bruit : } Y(s) = \Sigma(s)P(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)} \cdot \frac{a}{s^n}$$

$$d'où : \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K \frac{W(s)}{s^r}} \cdot \frac{a}{s^n} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a.s^{r-n+1}}{s^r + K}$$

On constate qu'on est ramené à la même condition que dans le cas de l'asservissement. Les résultats établis précédemment restent donc valables pour les perturbations. **Attention :** les intégrations doivent être situées en amont du point d'entrée de la perturbation.

Commande analogique

M. TOMEZAK - csl

Applications 1.

Précision (suite)

18

Erreur de position ($n=1$) :

$$e_{01} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a.s^r}{s^r + K} = \begin{cases} \frac{a}{1+K} & \text{si } r=0 \\ 0 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

Si la FTBO n'a pas de pôles à l'origine (pas d'intégration), l'erreur statique est finie, d'autant plus petite que K est grand (mais attention à la stabilité). Si la FTBO possède au moins une intégration, le système est parfaitement précis.

Erreur de vitesse ($n=2$) :

$$e_{02} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a.s^{r-1}}{s^r + K} = \begin{cases} \infty & \text{si } r=0 \\ \frac{a}{K} & \text{si } r=1 \\ 0 & \text{si } r \geq 2 \end{cases}$$

Pour une entrée de consigne en rampe, l'annulation de l'erreur stationnaire suppose la présence d'au moins deux intégrations dans la FTBO.

Erreur d'accélération ($n=3$) :

$$e_{03} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a.s^{r-2}}{s^r + K} = \begin{cases} \infty & \text{si } r=0 \text{ ou } 1 \\ \frac{a}{K} & \text{si } r=2 \\ 0 & \text{si } r \geq 3 \end{cases}$$

Conclusion : la valeur de l'erreur en régime permanent dépend du d° du polynôme d'entrée et du nombre d'intégrations dans la FTBO. En particulier, si la FTBO ne contient pas de pôles à l'origine, l'erreur permanente de position est finie. S'il est nécessaire de l'annuler, il faut introduire un correcteur dont la transmittance présente une intégration : correcteur à action intégrale.

Remarque : il existe un compromis nécessaire entre l'oscillation indicielle et le rattrapage de la rampe. En effet, soient $e_1(t)$ et $e_2(t)$ les erreurs correspondant respectivement à une consigne en échelon et en rampe, comme $E(s) = \Sigma(s)X(s)$, on a de façon évidente $E_2(s) = E_1(s)/s$, c'est à dire que $e_2(t)$ est l'intégrale de $e_1(t)$. Deux situations peuvent alors se présenter :

Commande analogique

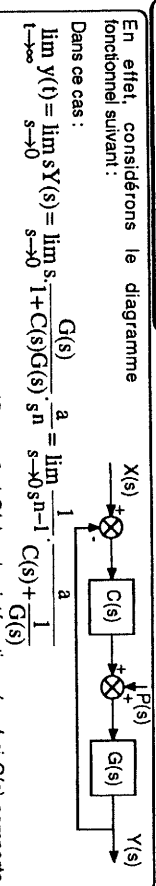
M. TOMEZAK - csl

Applications 1.

Précision (suite)

20

En effet, considérons le diagramme fonctionnel suivant :

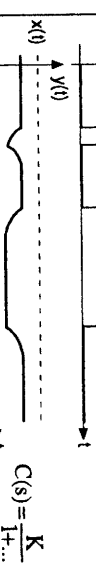


$$\text{Dans ce cas : } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \cdot \frac{a}{s^n} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^n + \frac{1}{a}C(s)G(s)}$$

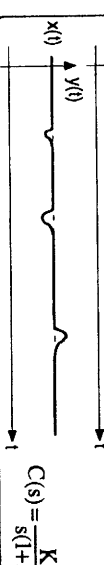
Lorsque s tend vers zéro, $1/G(s)$ tend vers $1/G_0$, ou 0 si $G(s)$ a des intégrations (sauf si $G(s)$ comporte des dérivations). Pour que $y(\infty)$ tende vers 0 comme on le souhaite, il faut que $s^n \cdot 1/C(s)$ tende vers l' ∞ . Donc, le correcteur $C(s)$ doit présenter au moins n intégrations. On aura toujours intérêt à placer les intégrations le plus possible en amont afin de combattre les perturbations de toute la chaîne.

Remarque : si une perturbation en échelon intervient et qu'il n'y a pas d'intégration, la perturbation n'est pas effacée mais tout de même limitée par la boucle, et cela d'autant mieux que le gain du correcteur est grand.

Exemple :



$$C(s) = \frac{K}{1+s \dots}$$



$$C(s) = \frac{K}{s(1+\dots)}$$

Sans intégration, $p(t)$ est seulement limitée par la boucle et ce d'autant plus que K est grand. De plus, l'erreur de position, non nulle, décroît quand K augmente. Avec intégration, l'erreur permanente est nulle et les perturbations en échelon sont effacées.

Commande analogique

M. TOMEZAK - csl

On a déjà évoqué le problème de l'échantillonnage auparavant. On se propose ici de revenir plus en détail sur les conditions à respecter lors de cette opération, ainsi que sur l'opération inverse, c'est à dire la reconstruction ou **reconstitution** de données. Remarque : on se limite au cas de l'échantillonnage périodique.

Signal échantillonné (rappels) :

Physiquement, il s'agit d'une suite d'impulsions où chaque impulsion indique la valeur, pendant un court intervalle de temps, du signal analogique. Dans le cas le plus fréquent, c'est à dire l'**échantillonnage par multiplication**, c'est la hauteur des impulsions qui est représentative. En particulier, dans le cas de l'**échantillonnage réel**, la valeur du signal analogique $x(t)$ aux instants d'échantillonnage kT_e est successivement représentée par une suite d'impulsions de durée constante Δ , dont la hauteur varie comme $x(t)$. Une approximation consiste à supposer ces échantillons rectangulaires de hauteur $x(kT_e)$ (échantillonnage avec maintien ou avec blocage d'ordre 0 ; cas fréquent en pratique). Dans la pratique, on s'arrange pour que $\Delta \ll T_e$. On peut alors assimiler le signal échantillonné à un train d'impulsions de Dirac modulées en amplitude (**échantillonnage idéal**), ce qui permet de simplifier l'analyse des différents phénomènes.

Spectre d'un train d'impulsions modulées :

On se place désormais dans le cas "idéal". Par conséquent, le signal échantillonné est donné par :

$$x(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

On en déduit :
$$H(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \mathcal{L}[\delta(t - kT_e)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-kT_e s} = H(z)_{z=e^{sT_e}}$$

Par ailleurs, la distribution peigne de Dirac étant périodique, elle peut être développée en série de Fourier :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_e t} \text{ avec } C_n = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) e^{-jn\omega_e t} dt = \frac{1}{T_e} \quad \forall n$$

d'où :
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jn\omega_e t}}{T_e} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(\omega - n\omega_e)t} dt$$

c'est à dire :
$$X(\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega - n\omega_e)$$

Le spectre du signal échantillonné est donc constitué, au facteur $1/T_e$ près, d'une suite de répliques "ailes" en anglais) du spectre du signal analogique, centrées sur des pulsations multiples de la pulsation d'échantillonnage ω_e .

Remarques : le résultat précédent peut s'interpréter en termes de convolution : la TF du produit d'un signal par un peigne de Dirac est égale au produit de convolution de la TF du signal et de la TF du peigne. Or la TF du peigne, de période T_e , est également un peigne, de période ω_e , on a donc bien une reproduction du spectre initial centrée sur les multiples de ω_e (voir Signaux 4, transp. 54).

Dans le cas de l'échantillonnage réel et avec maintien, on monte :

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n X(\omega - n\omega_e) \text{ avec } C_n = \text{sinc}\left(n \frac{\omega_e}{2\pi} \Delta\right)$$

répliques modulées en amplitude (éch. réel)

$$C_n = \text{sinc}\left(\frac{\omega \Delta}{2\pi}\right) e^{-j\frac{\omega \Delta}{2}}$$
 répliques déphasées et déformées par une fonction de la pulsation (éch. avec maintien)

Par hypothèse, le signal $x(t)$ représente la variation d'une grandeur physique et a par conséquent une énergie finie. Il possède donc une transformée de Fourier qui définit son spectre fréquentiel :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt ; \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

On cherche à présenter la relation entre la transformée de Fourier du signal analogique et celle du signal échantillonné, ainsi qu'avec la transformée en z :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j\omega kT_e} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) (e^{j\omega T_e})^{-k}$$

d'où finalement :

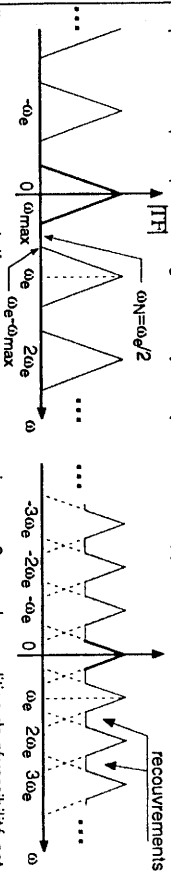
$$X(\omega) = H(z)_{z=e^{j\omega T_e}} \quad (\text{résultat attendu pour des distributions})$$

Remarque : on note au passage que le spectre du signal échantillonné est périodique, de période égale à la pulsation d'échantillonnage, en effet :

$$e^{j\omega T_e} = e^{j\left(\omega + k \frac{2\pi}{T_e}\right) T_e} \quad , \quad k \text{ entier, d'où : } X(\omega) = X(\omega + k\omega_e) \text{ avec } \omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = 2\pi f_e$$

On se place toujours dans le cas idéal, deux cas sont à considérer : selon la forme du spectre du signal analogique et selon la fréquence d'échantillonnage, les répliques spectrales sont à supports disjoints ou au contraire, se recouvrent partiellement (**recouvrement** ou **roulement spectral** "aliasing effect"). Or, la présence d'un tel recouvrement entraîne la non-réversibilité de la transformation et donc une perte d'information. Dans le cas d'un signal à bande non-limitée, ce phénomène a lieu quelque soit la fréquence d'échantillonnage. Or, une conséquence du théorème de Paley-Wiener est que tout signal physiquement réalisable ne peut être simultanément à bande limitée. Ainsi, **dans la réalité, l'échantillonnage entraîne toujours un certain recouvrement** ce qui exclut toute possibilité de reconstruction parfaite. Néanmoins, la condition d'énergie finie impose que le spectre tende vers zéro lorsque la fréquence tend vers $\pm\infty$, le spectre est donc quasiment nul à partir d'une certaine fréquence. Il est alors possible de choisir une fréquence d'échantillonnage ne provoquant qu'un recouvrement négligeable et permettant une réversibilité acceptable.

En pratique, le spectre du signal à échantillonner est généralement limité par filtrage passe-bas. La fréquence de coupure de ce filtre passe-bas, appelé **filtre anti-recouvrement** ("anti-aliasing filter"), est fixée en fonction de la bande jugée utile du signal d'origine. Dès lors, la condition de réversibilité de l'opération s'exprime pour des signaux de **spectre passe-bas à support borné** :



Il y a recouvrement spectral dès que $\omega_e - \omega_{\max} < \omega_{\max}$ i.e $\omega_e < 2\omega_{\max}$. La condition de réversibilité est donc donnée par : $\omega_e \geq 2\omega_{\max}$.

Remarque : toute pulsation ω' supérieure à la pulsation de Nyquist ω_N (la moitié de la pulsation d'échantillonnage) est une réplique de la pulsation $\omega = (\omega' + \omega_N) \bmod(\omega_e) - \omega_N$

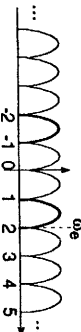
Enoncé du théorème : un signal continu, dont la TF est nulle en dehors de l'intervalle $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$, est donné de manière unique par ses valeurs aux instants d'échantillonnage si la pulsation (fréquence) d'échantillonnage est supérieure ou égale ($\geq$) dans le cas théorique d'un sinus pur) au double de la pulsation (fréquence) maximale $\omega_{\max}$ du signal. Dans ce cas, il n'y a pas de perte d'information et on peut théoriquement reconstruire le signal analogique.

Remarque : dans le cas d'un signal passe-bande à support borné $[\omega_1, \omega_2]$, la condition de Shannon est $\omega_e \geq 2\omega_2$, mais en fait la condition suffisante est donnée par :

$$\omega_{e,\min} = \frac{2\omega_2}{m} \quad \text{où } m \text{ est le plus grand entier } \leq \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$$

NB : toutes les fréquences supérieures ne sont pas forcément utilisables.

exemple : $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2$, d'où $m = 2$ et $\omega_e = \omega_2$.



Exemples :

Signal sinusoïdal échantillonné à 2 fois sa fréquence :
On a ici perdu de l'information puisqu'après échantillonnage, on ne fait plus la différence avec le signal nul.

2 signaux sinusoïdaux, à 0,1 et 0,9 Hz, échantillonnés à 1 Hz peuvent présenter les mêmes valeurs aux instants d'échantillonnage (on a perdu de l'information sur le signal à 0,9 Hz).

On peut trouver une infinité de sinusoïdes passant par ces mêmes échantillons, non détonnant donc à ce que le spectre correspondant comprenne une infinité de composantes.

Echantillonnage / Reconstruction

M. TOMEZAK - e.sai

Applications 2. RECONSTRUCTION de Shannon

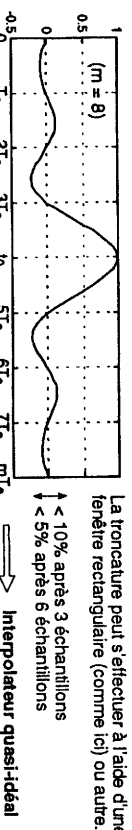
Dans l'expression précédente, $f(t)$ désigne la réponse impulsionnelle du filtre c'est à dire la TF inverse de $F(\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_e}}^{+\frac{\pi}{T_e}} F\left(\frac{\omega}{T_e}\right) e^{j\frac{\omega}{T_e} t} d\left(\frac{\omega}{T_e}\right) = \sin c\left(\frac{t}{T_e}\right)$$

D'autre part, le terme $x(\tau)$ s'écrit : $x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(\tau - kT_e) \rightarrow$ non-nul pour $\tau = kT_e$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(\tau - kT_e) \sin c\left(\frac{t-\tau}{T_e}\right) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \sin c\left(\frac{t-kT_e}{T_e}\right)$$

Ce filtrage est irréalisable, puisque non-causal et faisant intervenir une infinité de termes. La solution utilisée en pratique consiste à tronquer la réponse impulsionnelle du filtre et à la décaler de $t_0 = mT_e/2$:



La troncature peut s'effectuer à l'aide d'une fenêtre rectangulaire (comme ici) ou autre.

Remarque : dans la réalité, une reconstruction de très haute qualité suppose en plus de tenir compte des déformations et des déphasages introduits par exemple par l'échantillonnage avec maintien.

Echantillonnage / Reconstruction

M. TOMEZAK - e.sai

Applications 2. RECONSTRUCTION de signaux

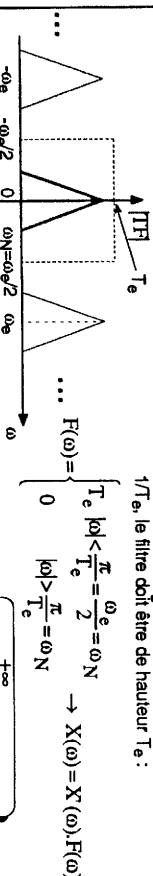
La reconstitution d'un signal analogique $x(t)$ à partir d'échantillons $x(kT_e)$ successifs implique la restitution de toutes les valeurs intermédiaires. Celle-ci est en pratique approximative.

Concernant les systèmes de restitution, on parle d'**extrapolateur d'ordre m** (détermination des valeurs du signal suivant x_k à partir de $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}$) ou d'**interpolateur d'ordre m** (à partir de $m+1$ échantillons, dont certains postérieurs à x_k). Ce dernier étant non-causal, on le rend causal en admettant un retard à la reconstruction.

Remarque : en traitement du signal, certaines applications peuvent tolérer ce retard (ex : télécom.). Par contre, dans tous les systèmes bouclés, cela peut poser des problèmes de stabilité, on prête alors utiliser des extrapolateurs (généralement des bloqueurs d'ordre 0).

Interpolateur idéal (reconstructeur de Shannon) :

On se place dans le cas d'un signal à spectre passe-bas, l'échantillonnage est supposé idéal et sans recouvrement. Le filtre de reconstruction idéal est alors un filtre rectangulaire passe-bas, de pulsation de coupure $\omega_e/2$, ce qui permet d'éliminer totalement les parties du spectre introduites par l'échantillonnage :



Ce produit correspond à un produit de convolution dans le domaine temporel, donc :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

Echantillonnage / Reconstruction

M. TOMEZAK - e.sai

Applications 2. RECONSTRUCTION (suite)

Remarque : dans la pratique, on utilise en fait un interpolateur quasi-idéal numérique. La reconstruction est alors effectuée en deux étapes : l'interpolateur travaille en fait à une fréquence plus élevée $T_e = L \cdot T_e$ ($L \gg 1$) et alimente à cette cadence un bloqueur d'ordre 0 (CNA) suivi éventuellement d'un filtre de lissage. Le **surséchantillonnage** introduit par l'interpolation remplace la période de répétition ω_e du spectre du signal échantillonné par $L \cdot \omega_e$ et ce sans modifier $\omega_{\max}$. De plus, le bloqueur et le filtre éventuel agissent comme des filtres passe-bas. Lorsque L est choisi suffisamment grand, la distortion introduite par l'ensemble bloqueur/filtre est négligeable.

Conclusion : Cette méthode de reconstruction introduit un retard relativement important et conduit à des charges de calcul élevées. De plus, elle est inutilisable en cas d'échantillonnage irrégulier. Elle n'est donc généralement pas employée en commande échantillonnée et reste réservée à certaines applications particulières de traitement du signal nécessitant une qualité de reconstruction irréprochable (exemple : lecteur de CD).

Remarques : D'autres interpolateurs peuvent être imaginés utilisant un filtre passe-bas de réponse impulsionnelle $g(t)$. Par analogie avec ce qui précède, on réalise alors :

$$x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) g(t-t_0-kT_e)$$

En fait, tous les systèmes de reconstruction peuvent s'exprimer sous cette forme. Pour des signaux à spectre passe-bande, on procède de manière similaire mais avec un filtre passe-bande.

Reconstruction par approximation polynômiale :

Par $m+1$ échantillons, on ne peut faire passer qu'un seul polynôme de degré m . Si les $m+1$ échantillons $x_{k-m}, \dots, x_k$ sont connus, une approximation de $x(t-t_0)$ pour $kT_e \leq t \leq (k+1)T_e$ et $0 \leq t-t_0 \leq mT_e$ peut être calculée en utilisant la **méthode des polynômes de Lagrange** (le retard global : $t_0 = rT_e +$ éventuellement t_0 le temps de calcul, dépend alors du choix de r et de m) :

Echantillonnage / Reconstruction

M. TOMEZAK - e.sai

$$x(t-rT_e(-t')) = \sum_{i=0}^m x_i + k-m q_{m,i} [t-(k+r-m)T_e] \text{ avec } \begin{cases} q_{m,i}[t] = \prod_{n=0}^m \frac{t-nT_e}{(i-n)T_e} & i=0, \dots, m \\ q_{0,0}[t] = 1 \end{cases}$$

Pour $r \neq 0$, on obtient une interpolation (linéaire si $r = 1$, $m = 1$, $t_0 = T_e$). Pour $r = 0$, on obtient une extrapolation qui peut se ramener à la formule dite de Newton-Gregory :

$$\hat{x}(t) = x_k + \frac{t-kT_e}{T_e} (x_k - x_{k-1}) + \frac{(t-kT_e)^2}{2!T_e^2} (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}) + \dots$$

Cas particulier important : extrapolateur ou bloqueur d'ordre 0 ($r = 0$, $m = 0$). Celui-ci réalise :

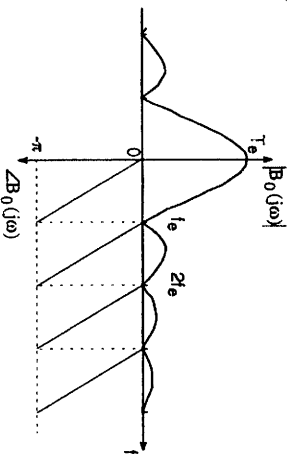
$$\hat{x}(t) = x_k \text{ pour } kT_e \leq t < (k+1)T_e$$

On en déduit sa réponse impulsionnelle, puis sa FT :

$$\begin{aligned} \hat{B}_0(s) &= \frac{1-e^{-sT_e}}{s} & \text{On en tire sa réponse fréquentielle :} \\ B_0(j\omega) &= \frac{1-e^{-j\omega T_e}}{j\omega} = T_e e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} \frac{e^{j\frac{\omega T_e}{2}} - e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}}{j2} = T_e e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} \frac{2j \sin(\frac{\omega T_e}{2})}{2} = T_e e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} \text{sinc}(\frac{\omega T_e}{2}) \end{aligned}$$

Exemple d'application / Reconstruction

M. Tonzak - chsl



Ainsi le bloqueur d'ordre 0 est bien un filtre passe-bas. Dans la bande fréquentielle d'intérêt, la réponse fréquentielle du bloqueur d'ordre 0 est comparable à celle d'un retard pur $T_e \exp(-sT_e/2)$ (module constant T_e et déphasage linéaire). Ce retard pur est ainsi souvent utilisé comme une approximation de la fonction de transfert du bloqueur.

Avec ce système de reconstruction, somme toute plutôt rudimentaire, il est clair que pour que le spectre du signal reconstruit soit proche du spectre du signal analogique de départ, la fréquence d'échantillonnage doit être nettement plus élevée que 2 max . Dans la pratique, comme on le verra par la suite, cette règle doit être plus ou moins respectée quelque soit le système de reconstruction, car nous ne pouvons pas que le théorème de Shannon repose sur un certain nombre d'hypothèses rarement vérifiées à la lettre. Avec le bloqueur d'ordre 0, seul l'échelon est parfaitement reconstitué. Une estimation de l'erreur maximale de reconstruction est donnée par :

$$e_{B_0} = \max_k |x_{k+1} - x_k| \leq T_e \cdot \max_i |\dot{x}(t)|$$

La fonction de maintien inhérente au B_0 est naturellement réalisée par les CNA standards, à l'entrée desquels les valeurs numériques sont maintenues pendant la durée du pas d'échantillonnage T_e . Aussi le B_0 est-il de loin le système le plus employé. Souvent, on le fait suivre d'un filtre de lissage additionnel pour atténuer les hautes fréquences indésirables dues à la variation en "escaliers" du signal de sortie.

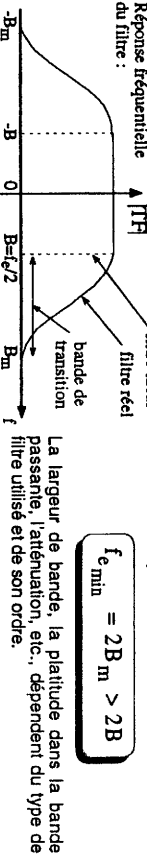
Exemple d'application / Reconstruction

M. Tonzak - chsl

Très souvent, le spectre du signal à échantillonner n'est pas parfaitement connu. Il contient généralement une composante à large bande due à la présence additionnelle de bruit de fond engendré dans le milieu de mesure, les capteurs, les amplificateurs, etc. Après échantillonnage, des hautes fréquences peuvent apparaître comme des basses fréquences à cause du repliement de spectre. Il est donc nécessaire d'effectuer un pré-filtrage analogique afin de supprimer tout risque de recouvrement sans devoir imposer une fréquence d'échantillonnage excessive. Le filtre utilisé est appelé **filtre anti-repliement** ou **filtre de garde** ("anti-aliasing filter").

Remarque : souvent, les capteurs analogiques comportent un filtre, qu'il est alors possible d'ajuster par rapport à la fréquence d'échantillonnage.

Le filtre anti-repliement idéal est le filtre passe-bas idéal (rectangulaire), de bande passante $B = f_c/2 = 1/4T_e$ (fréquence de Nyquist). En pratique, le filtre comporte une **bande de transition** qui reporte la bande passante limitée B_m au delà de B :



$$f_{c_{min}} = 2B_m > 2B$$

Avec un tel filtrage, on devra donc avoir en réalité :

En l'absence de contraintes spécifiques, un filtre standard du 2ème ordre peut très bien faire l'affaire :

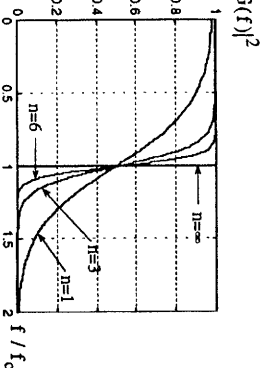
$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} ; \omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ (+ abaques 2ème ordre)}$$

Exemple d'application / Reconstruction

M. Tonzak - chsl

Si l'on souhaite obtenir un filtre à atténuation plus forte, on peut bien sûr mettre en cascade plusieurs filtres du 1er et/ou du 2ème ordre. Enfin, si cela est nécessaire, on peut mettre en œuvre des filtres à haute performance (Bessel, Butterworth, Tchebycheff, Causer, etc.). Le type de filtre est alors choisi en fonction de la caractéristique que l'on souhaite privilégier : **platitude de la réponse fréquentielle** dans la bande passante (**Butterworth**), **raideur à la fréquence de coupure** (**Tchebycheff inverse**), **raideur de coupure** (**Legendre**), **atténuation uniformément croissante**, **Tchebycheff** et **Causer**, qui présentent des **ondulations**, **déphasage linéaire** (Bessel : assimilable à un retard pur).

EXEMPLE :



Approximation de Butterworth de degré n :

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_c)^{2n}}$$

Elle maintient une **réponse plate optimale** dans la bande passante, avec atténuation de -3 dB à la fréquence de coupure f_c et une pente asymptotique d'atténuation de -20 n dB/décade pour $f > f_c$.

Pour $n = 2$, on retrouve un cas particulier du filtre du 2ème ordre standard, avec : $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

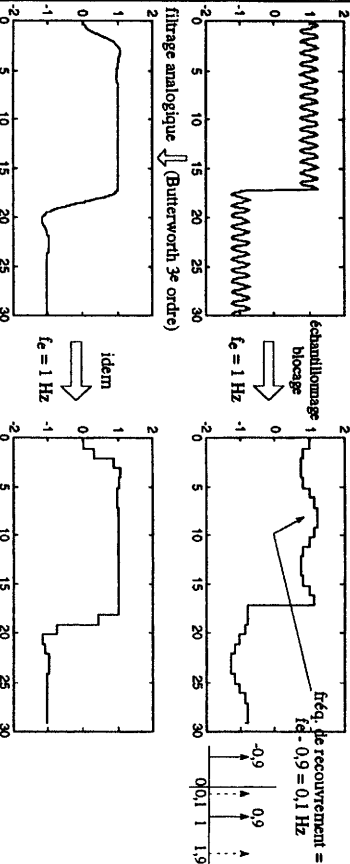
Remarque : Le filtre de Bessel revêt un intérêt particulier dans le cadre de la commande échantillonnée des systèmes. Étant assimilable à un retard pur, sa prise en compte dans le modèle du système à commander est plus facile à réaliser, de plus, il entraîne moins de distorsion du signal.

Exemple d'application / Reconstruction

M. Tonzak - chsl

Utilité du préfiltrage, illustration sur un exemple :

Soit un signal analogique composé d'une onde rectangulaire et d'une perturbation sinusoïdale à 0,9 Hz. On compare les résultats obtenus après échantillonnage à la fréquence de 1 Hz puis blocage d'ordre 0, dans les deux cas, c'est à dire avec et sans pré-filtrage :



Remarque : dans le contexte de la commande de processus, dans certains cas très particuliers, on ne peut pas effectuer de filtrage analogique tel qu'on l'a envisagé jusqu'à présent. Exemple : il n'est pas toujours techniquement possible de mesurer en ligne certaines caractéristiques (humidité par exemple) au sein d'un flux de produit. Celui-ci est alors échantillonné pour analyse en laboratoire. Dans ce cas, il faut prendre plusieurs échantillons en considération et les mélanger avant analyse (ou prendre la valeur moyenne sur les différents échantillons).

Echantillonnage / Reconstruction

M. Tomiczek - ESI

Applications 2. choix de la fréq. d'échantillonnage

39

En pratique, il faut donc tenir compte de nombreux aspects, parfois contradictoires, parmi lesquels :

Les propriétés, spectrales essentiellement, du signal

- présence de perturbations haute fréquence,
- spectre passe-bas ou passe-bande, ...
- etc.

La méthode de reconstruction

- on peut retenir comme idée générale que plus on s'éloigne de l'interpolateur idéal, plus il faut prendre une marge importante par rapport à la condition de Shannon.

Les contraintes technologiques

- rapidité des divers organes : actionneurs, capteurs, convertisseurs, calculateur,
 - temps de reconstruction.
- Les objectifs poursuivis, et notamment le but de la reconstruction**
- traitement du signal (vaste !),
 - commande des systèmes,
 - identification des systèmes,
 - simulation des systèmes.

EXEMPLE : Dans de nombreuses applications de traitement du signal, le critère de choix prépondérant de la fréquence d'échantillonnage est l'erreur entre le signal d'origine et le signal reconstruit. Ainsi, si le signal considéré est une sinusoïde pure de pulsation ω_0 :

$$x(t) = \sin \omega_0 t$$

Dans ce cas, Shannon indique : $\omega_e \geq 2\omega_0$, soit $\frac{2\pi}{T_e} \geq 2\frac{2\pi}{T_0}$, i.e. $\frac{T_0}{T_e} \geq 2$

Ceci est valable si on suppose une reconstruction idéale par ailleurs.

Echantillonnage / Reconstruction

M. Tomiczek - ESI

Applications 2. PREFILTRAGE (fin), CHOIX DE f_e

Remarque : concernant la réalisation des filtres analogiques, tant que la fréquence de coupure est supérieure à 5 Hz, on peut généralement se contenter de réseaux passifs de type RC. Lorsque la fréquence de coupure est comprise dans l'intervalle 0,1 Hz à 5 Hz, des réseaux actifs (à base d'amplificateurs opérationnels) doivent être utilisés. Enfin, pour des fréquences de coupure inférieures à 0,1 Hz, les filtres analogiques sont généralement trop chers, on procède alors à un échantillonnage à fréquence très élevée suivi d'un filtrage numérique (on parle parfois de suréchantillonnage/filtrage numérique).

Aspects pratiques du choix de la fréquence d'échantillonnage :

D'un point de vue général, le choix de la fréquence d'échantillonnage adéquate est un problème complexe, qui dépend de nombreux paramètres, et qui ne connaît pas de solution miracle qui s'écrit facilement : chaque application constitue un cas particulier qui convient d'analyser avec soin. Toutefois, il existe des situations où le choix de f_e n'est pas crucial, c'est à dire dans le sens où les conséquences, sur le but poursuivi, d'un choix approximatif, restent limitées. Dans ce cas, des règles simples peuvent être établies.

En théorie, on applique bien sûr le théorème de Shannon, mais il ne faut pas perdre de vue le fait que celui-ci repose sur un certain nombre d'hypothèses.

En particulier, le théorème de Shannon suppose un spectre initial borné

- ceci implique, en pratique, un filtrage analogique et donc une modification des caractéristiques du signal. Selon les cas, ces changements peuvent avoir des conséquences non-négligeables.

Dans le cas où une reconstruction est nécessaire, il suppose une reconstruction idéale

- Bien sûr, dans la pratique, la reconstruction ne peut être que quasi-idéale, mais elle entraîne tout de même un temps de reconstruction important (ce qui est loin d'être toujours acceptable).

Echantillonnage / Reconstruction

M. Tomiczek - ESI

Applications 2. choix de la fréq. d'échantillonnage

40

Mais, si le temps de reconstruction doit être court, il faut utiliser un système de reconstruction plus rudimentaire, tel un bloqueur d'ordre 0. L'échantillonnage selon Shannon se révèle alors largement insuffisant comme on va le voir. En utilisant l'expression de l'erreur de reconstruction introduite précédemment :

$$e_{B_0} = \max_k |x_{k+1} - x_k| \leq T_e \cdot \max_t |\dot{x}(t)|$$

On peut établir pour le signal sinusoïdal :

$$e_{B_0 \text{ max}} = T_e \cdot \max_t |\omega_0 \cos \omega_0 t|$$

soit une erreur moyenne :

$$e_{B_0} = \frac{T_e \omega_0}{2} = \frac{\pi T_e}{T_0} = \frac{\pi}{N}$$

où N représente le nombre d'échantillons par période de la sinusoïde T_0 . Si on veut une erreur de 1 %, il faut **N = 315 échantillons par période T_0** . Ce nombre est à comparer avec les 2 échantillons par période préconisés par le théorème de Shannon !

De façon générale, en pratique, on retiendra la règle :

$$f_e \gg 2f_{\text{max}}$$

Exemples :

Signal téléphonique, $f_{\text{max}} = 3400 \text{ Hz}$, normes internationales : $f_e = 8000 \text{ Hz}$.

Signal vidéo TV, $f_{\text{max}} = 5 \text{ MHz}$, $f_e = 18 \text{ MHz}$.

On abordera par la suite le problème spécifique du choix de la fréquence d'échantillonnage dans le contexte de l'automatique, plus particulièrement en ce qui concerne la commande de systèmes échantillonnés. Dès et déjà, il est clair que ce choix dépendra en grande partie des caractéristiques dynamiques du processus à commander.

Echantillonnage / Reconstruction

M. Tomiczek - ESI

Introduction :

Dans ce chapitre, on aborde le problème de **transposition analogique/numérique** qui consiste, comme son nom l'indique, à déterminer, si possible, l'équivalent numérique d'un système analogique donné. Ce problème se pose dans divers secteurs d'application, dès lors que l'on cherche à réaliser un système numérique qui fonctionne à peu près de manière identique à un système continu pris pour référence. En fait, si l'on voulait être précis, on devrait plutôt parler de **discretisation d'un système analogique**, dans la mesure où l'opération de quantification n'est pas prise en compte. D'ordinaire, on supposera que la quantification est suffisamment fine pour être négligée, et l'on utilisera indifféremment les deux expressions.

La question de la discretisation peut être abordée selon plusieurs points de vue, et à chaque approche différente, peuvent correspondre plusieurs variantes. Au total, il existe un grand nombre de techniques distinctes de discretisation et il n'est pas question ici de les étudier toutes. En particulier, le domaine de la **simulation numérique**, c'est à dire sur calculateur, de systèmes continus fait appel à des algorithmes complexes, bien connus des spécialistes de l'analyse numérique, comme la **méthode de Runge-Kutta**, qui dépassent du cadre de ce cours.

Remarque : la simulation est un problème plus général dans le sens où il s'agit d'obtenir la sortie d'un système continu pour des temps discrets, sans passer obligatoirement par les équations d'un système discret équivalent.

On va se contenter ici d'étudier le problème de la discretisation tel qu'il se pose dans deux applications précises :

- **en automatique :** la commande d'un système peut s'effectuer à l'aide d'un calculateur. Il est courant dans une telle situation, notamment pour des raisons historiques, de synthétiser un correcteur continu, puis de discrétiser le résultat afin d'implanter le correcteur sous forme numérique sur le calculateur. On parle alors de **discretisation de lois de commande continues**.
- **en traitement du signal :** en fait, pour d'évidentes raisons historiques, une méthode de synthèse d'un filtre numérique très usée consiste à s'inspirer d'un filtre analogique donné. Cette approche conduit à **des filtres numériques RII donc récurrents**.

Transposition analogique/numérique

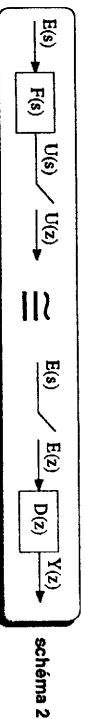
M. Tomczak - cslil

Applications 3.

Formulation (2) / Cas de la commande

43

Dans ce cas particulier, on recherche l'équivalence :



Cette fois, l'équivalence est considérée du point de vue numérique. Fondamentalement, le problème reste inchangé, et encore une fois, il ne peut y avoir qu'une équivalence approximative puisqu'il est impossible, dans le cas du schéma de gauche, d'établir une fonction de transfert en z entre l'entrée et la sortie.

En effet, dans le second cas, on a directement : $Y(z) = D(z).E(z)$ alors que dans le premier cas, on a : $U(z) = Z[F(s).E(s)]$

Remarque : comme on le verra plus tard, dans le cas du schéma 1 comme dans le cas du second, on peut trouver des solutions exactes mais valables uniquement pour une entrée donnée.

A présent, on va examiner plus précisément le contexte dominant lieu à une transposition analogique/numérique dans le cas de la commande échantillonnée et dans le cas du filtrage linéaire.

Cas de la commande numérique (schéma 1)

Dans le cas de la commande des systèmes, le système de FT C(s) représente un correcteur, ou régulateur, analogique, dont la sortie U(s) est la loi de commande continue appliquée au système à réguler (SAR). La FT R(z) représente alors le régulateur numérique correspondant, dont le signal de sortie doit être reconstruit, en général avec un bloqueur d'ordre 0, pour pouvoir être appliqué au SAR, qui est bien sûr continu. Deux cas de figure peuvent amener à considérer le problème de discretisation :

Transposition analogique/numérique

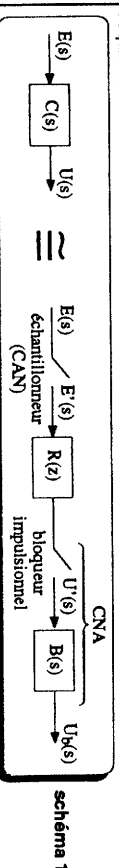
M. Tomczak - cslil

Applications 3.

Formulation du problème (1)

42

Bien que les objectifs et les contraintes soient différents selon que l'on s'intéresse à la synthèse d'un filtre numérique ou bien à la commande numérique d'un système, le problème de la discretisation peut s'énoncer de manière similaire dans les deux contextes. En fait, on cherche le système numérique possédant les mêmes propriétés qu'un système analogique de référence, ce qui correspond à l'équivalence entre les deux schémas suivants :



Ainsi, à une loi de nature continue, on désire substituer un ensemble constitué d'un CAN suivi d'un filtre numérique et d'un CNA (comportant un bloqueur B(s)). On peut immédiatement constater que l'équivalence entre les deux schémas ne peut être qu'approximative. En effet, si l'on calcule la TL (monolatère) de $U_0(s)$, il vient :

$$U_b(s) = B(s).R(e^{sT_e}).\left[\left(\frac{1}{2}e^{0^+}\right) + \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left(s - \frac{2j\pi n}{T_e}\right)\right]$$

si d^0 den. de $E > d^0$ num. $+1$

Il est clair que, contrairement au cas du schéma de gauche, dans le cas de celui de droite, l'on ne peut définir de fonction de transfert en TL entre l'entrée et la sortie. Il s'agit donc de déterminer R(z) et B(s) tels que la relation entre U(s) et E(s) soit préservée au mieux.

Dans le cas particulier de la synthèse de filtres, on n'a pas toujours besoin de procéder à la reconstruction du signal de sortie (ce qui est bien sûr impensable en commande échantillonnée). On est alors ramené à une situation légèrement différente (voir schéma page suivante), mais qui ne change pas le fond du problème.

Transposition analogique/numérique

M. Tomczak - cslil

Applications 3.

Cas de la commande numérique (2)

44

□ En matière de commande numérique des systèmes, deux approches sont possibles :

- la **synthèse directe** : la synthèse du correcteur s'effectue directement dans le domaine numérique, à partir d'un modèle discrétisé du SAR. Bien que sur le papier, cette approche ait le mérite d'exploiter pleinement les possibilités offertes par le numérique, elle reste peu utilisée pour diverses raisons : faisabilité, prédominance de la commande PID, issue du continu, prise en compte uniquement d'un modèle "robotoscopique" du SAR, nouveauté pour les ingénieurs, etc.

• la **synthèse indirecte** : la synthèse du correcteur s'effectue classiquement dans le domaine analogique, éventuellement en prenant en compte les éléments supplémentaires, propres au numérique (filtres anti-repliement, convertisseurs), et on discrétise le résultat. En quelque sorte, cette approche ne permet que de faire du "sous-analogique", puisque la discretisation est approximative, c'est pourquoi la plus répandue, pour des raisons historiques (développement préalable et maturité des méthodes de régulation analogiques, savoir-faire "continu" des ingénieurs, prépondérance dans l'industrie de la régulation PID), et pratiques (elle a l'avantage de "coller" à la réalité d'un SAR qui répond-on est continu). C'est évidemment dans cette approche indirecte que se pose le problème de la discretisation.

□ Parfois, il s'agit simplement de remplacer un régulateur analogique existant, par un régulateur numérique, moins cher, plus souple, et plus fiable. Si le correcteur analogique (un PID le plus souvent !) fonctionne de manière satisfaisante, il est intéressant, dans ce cas, de disposer de méthodes de discrétisation, afin de ne pas avoir à recommencer la synthèse du correcteur dans le domaine discret. En fait, on est ici confronté à un problème de synthèse indirecte non-préméditée.

Lors d'une synthèse indirecte, et avant d'opérer la discrétisation proprement dite, deux approches sont possibles :

- la première a pour objet de discrétiser le correcteur analogique déterminé de façon conventionnelle, sans s'occuper du convertisseur, donc du bloqueur, en aval.
- la deuxième consiste à déterminer le correcteur analogique pour commander l'ensemble bloqueur/SAR, avant de le discrétiser.

Transposition analogique/numérique

M. Tomczak - cslil

Applications 3. Cas de la commande numérique (3) 45

La deuxième approche est bien sûr préférable, en raison notamment de l'influence du bloqueur sur les marges de stabilité du système. Un façon de procéder est alors de modifier le correcteur analogique en tenant compte de la présence du bloqueur et de manière à fixer des marges adéquates. Afin de simplifier la démarche, la prise en compte du bloqueur, en principe d'ordre 0, se fait en remplaçant la FT $B_0(s)$ par une approximation :

$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s} \approx T_e e^{-\frac{sT_e}{2}} \quad \text{retard pur d'une demi-période d'échantillonnage}$$

Pour plus de précision, on peut aussi utiliser :

$$B_0(s) = \frac{T_e}{1 + s \frac{T_e}{2}} \quad \text{ou bien} \quad \frac{T_e}{1 + s \frac{T_e}{2} + \frac{(sT_e)^2}{12}}$$

Ces deux dernières relations reposent sur les approximations de Padé :

$$e^{-sT} \approx \frac{1 - \frac{sT}{2}}{1 + \frac{sT}{2}} \quad \text{et} \quad e^{-sT} \approx \frac{1 - \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{12}}{1 + \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{12}}$$

Remarques :

- La deuxième approche suppose la période d'échantillonnage connue à l'avance.
- Pour être vraiment rigoureux, il peut être nécessaire de prendre également en compte, lors de la synthèse du correcteur analogique, l'adjonction de filtres anti-repliement.
- Si la première approche est retenue, il convient au moins de vérifier a posteriori que l'adjonction du bloqueur ne dégrade pas abusivement les performances du système continu.

Transposition analogique/numérique

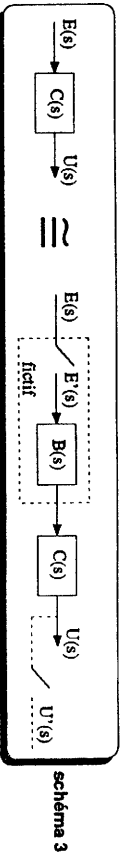
M. Tonzak - ead

Applications 3. Les méthodes de discrétisation 47

On passe à présent en revue les principales méthodes de discrétisation couramment utilisées en filtrage et en commande numériques. Quelque soit la méthode choisie, il faut garder à l'esprit que le système, ou le filtre, numérique obtenu présente une réponse fréquentielle périodique. Par conséquent, le choix de la fréquence d'échantillonnage doit s'effectuer notamment de manière à éviter tout phénomène de recouvrement dans la bande passante. Il faudra aussi s'arranger pour que la fréquence de coupure (ou la fréquence utile) soit suffisamment faible par rapport à la fréquence de Nyquist.

Techniques spécifiant la nature du signal d'entrée

On a vu précédemment (schéma 1) que l'on ne pouvait définir de transmittance en T_L strictement équivalente à $C(s)$. On modifie le schéma pour que l'équivalence en discret apparaisse naturellement, en rajoutant un échantillonneur bloqueur fictif :



Cette fois, on a bien une fonction de transfert en z entre $E(z)$ et $U(z)$, qui dépend du bloqueur choisi et qui représente l'équivalent $R(z)$ cherché :

$$R(z) = Z[B(s)C(s)]$$

Interprétation : cette méthode revient à réaliser un correcteur ou un filtre numérique dont la réponse coïncide, aux instants d'échantillonnage, avec la réponse du système analogique de référence à un signal d'entrée donné. Différentes variantes peuvent être envisagées suivant la forme du signal d'entrée choisie. En général, on se limite à considérer le cas de l'impulsion, de l'échelon, voire de la rampe.

Transposition analogique/numérique

M. Tonzak - ead

Applications 3. Cas du filtrage (schémas 1 et 2) 46

Lors de la synthèse d'un filtre, les caractéristiques souhaitées sont spécifiées dans le domaine fréquentiel, en termes de gain et de déphasage. La synthèse d'un filtre numérique consiste donc à déterminer les coefficients d'un filtre causal RIF ou RII dont la réponse fréquentielle approche au mieux ces spécifications. Le choix d'une structure RIF ou RII dépend de la nature du problème et des caractéristiques fréquentielles désirées. En général, les filtres RIF, non-récursifs, sont utilisés lorsqu'un déphasage linéaire dans la bande passante est nécessaire. En l'absence d'une telle contrainte, on peut utiliser indifféremment l'une ou l'autre structure.

Du fait de la maturité et des avancées de la théorie et de la pratique du filtrage analogique, il est courant de effectuer la synthèse du filtre dans le domaine analogique, puis de discrétiser le résultat. Dans ce cas, on aboutit à un filtre RII.

Remarques :

- Le respect de la réponse fréquentielle du filtre analogique de référence par le filtre numérique équivalent est ici un problème bien plus crucial que l'en commande des systèmes.
- A l'instar de ce qui se passe en commande, on peut effectuer la synthèse d'un filtre numérique directement dans le domaine discret.
- Dans le cas de la synthèse directe, on utilise parfois des méthodes d'optimisation (programmation non-linéaire) tels que l'algorithme de Remez.

Malgré les différences entre le cas du filtrage et celui de la commande, de nombreuses techniques de discrétisation sont utilisées indifféremment dans l'une ou l'autre situation. En revanche, certaines sont plutôt propres au domaine du filtrage et ne seront pas abordées en détail dans ce chapitre. Il s'agit notamment des méthodes suivantes :

Approximation impulsionnelle (méthode des fenêtres) : elle consiste à discrétiser la réponse impulsionnelle du filtre analogique de référence. Celle-ci étant généralement infinie, on procède à une troncation, à l'aide d'une fenêtre donnée (rectangulaire, triangulaire, de Hamming, de Blackman, etc.).

Technique d'échantillonnage en fréquence : elle revient à chercher un filtre passant par un nombre donné de points de la réponse en fréquence d'un filtre de référence.

Transposition analogique/numérique

M. Tonzak - ead

Applications 3. Méthodes à entrée imposée 48

INVARIANCE IMPULSIONNELLE : c'est l'approximation par la transformée en z , en effet, on a :

$$R(z) \cdot Z[\delta_k] = Z[C(s)L[\delta(t)]] \quad \text{soit} \quad R(z) = Z[C(s)]$$

La réponse fréquentielle $R(z) = \exp(j\omega T_e)$ est différente de $C(s=j\omega)$, notamment en haute fréquence (i.e. au voisinage de la fréquence de Nyquist). De plus, le gain statique ($\omega=0$) n'est pas conservé.

$$\text{Exemple : } \frac{1}{s+a} \rightarrow K_{s=0} = \frac{1}{a} ; Z\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}} \rightarrow K_{z=1} = \frac{1}{1 - e^{-aT_e}}$$

INVARIANCE INDICIELLE : on a alors la contrainte :

$$R(z) \cdot Z[1_k] = Z[C(s)L[1(t)]] \quad \text{d'où} \quad R(z) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = Z\left[C(s) \cdot \frac{1}{s}\right]$$

soit $R(z) = (1 - z^{-1}) Z\left[\frac{C(s)}{s}\right]$ ce qui revient à prendre $B(s) = B_0(s)$. Cette approche est préférable, le B_0 étant un passe-bas, les hautes fréquences sont atténuées, ce qui limite les éventuels recouvrements et donc augmente la plage de fréquence dans laquelle l'approximation est acceptable. De plus, le gain statique est conservé, en effet :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{\text{rép}_{\text{ind}}(KT_e)\} = \lim_{z \rightarrow 1} \{(1 - z^{-1}) Z[\text{rép}_{\text{ind}}(KT_e)]\} = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{(1 - z^{-1})} \right\} = \lim_{z \rightarrow 1} R(z)$$

$$\text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \{\text{rép}_{\text{ind}}(t)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{s \cdot L[\text{rép}_{\text{ind}}(t)]\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \cdot \frac{C(s)}{s} \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} C(s)$$

$$\text{donc} \quad \lim_{z \rightarrow 1} R(z) = \lim_{s \rightarrow 0} C(s) \quad \text{et} \quad \text{notamment} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} R(z = e^{j\omega T_e}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} C(s = j\omega) = K_{\text{stat}}$$

Transposition analogique/numérique

M. Tonzak - ead

Applications 3. Méth. à entrée imposée / Corresp. P-Z 49

INVARIANCE DE LA RAMPE : toujours selon le même principe, on obtient :

$$R(z) = \frac{(1-z^{-1})^2}{T_e z^{-1}} Z \left[\frac{C(s)}{s^2} \right]$$

Cette méthode est censée être mieux adaptée à des signaux à variations rapides, mais elle est assez peu utilisée en pratique. On rencontre parfois une variante, de la forme :

$$R(z) = \frac{(1-z^{-1})^2}{T_e} Z \left[(1+sT_e) \frac{C(s)}{s^2} \right]$$

Remarque : toutes les méthodes de cette famille conservent les pôles, c'est à dire qu'un pôle si est transformé en un pôle $z_i = \exp(s_i T_e)$. Par conséquent, elles préservent la stabilité (l'équivalent discret d'un système continu stable est lui-même stable).

Correspondance Pôles - Zéros

Il s'agit d'une méthode heuristique, ne reposant pas sur un raisonnement théorique. On part du constat suivant : on sait que les pôles en s (s_i) sont liés aux pôles en z (z_i), par la relation $z_i = \exp(s_i T_e)$. Cette correspondance n'existe pas pour les zéros. Exemple :

$$Z \left[\frac{(s+1)}{s^2} \right] = \frac{z(z+T_e-1)}{(z-1)^2}$$

un zéro en $s = -1$ un zéro à l'origine
 $z = e^{sT_e} = 0 \rightarrow s = -\infty$
 un zéro en $1 - T_e \neq \exp(-T_e)$

En fait, on montre qu'on a $z_i = \exp(s_i T_e)$ pour T_e petit. Par ailleurs, des zéros supplémentaires sont introduits par l'échantillonnage ("zéros d'échantillonnage"). Intuitivement, on comprend bien que les pôles caractérisent le régime libre d'un système, alors que les zéros influent sur le régime forcé c'est à dire dépendant de l'entrée. Or les entrées appliquées au système sont différentes par nature dans le cas continu et dans le cas discret.

Transposition analogique/numérique

M. TOMEZAK - cslul

Applications 3. Méthodes de quadrature 51

Sachant que $1/s$ correspond à un opérateur d'intégration, les différentes approximations discrètes de l'intégration (méthode des rectangles, des trapèzes, etc.) fournissent autant de façons de remplacer s par un équivalent en z .

APPROXIMATION RECTANGULAIRE (backward rectangular) :

"L'intégrale" x_k de e_k est ici donnée par :

$$x_k = x_{k-1} + T_e e_k = x_{k-1} + T_e \dot{x}_k$$

ce qui revient à remplacer

$$\frac{dx(t)}{dt} \text{ par } \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

$$c \text{ est à dire que l'on pose } s \equiv \frac{z-1}{T_e z}$$

$$\text{ou bien, de manière équivalente : } Z = e^{sT_e} \equiv \frac{1}{1-sT_e}$$

On peut alors se demander quelle est l'influence de cette transformation rectangulaire sur la stabilité. La condition de stabilité en continu étant donnée par :

$$\Re\{s\} < 0, \text{ on est amené à vérifier : } \Re\left\{ \frac{z-1}{zT_e} \right\} < 0, \text{ soit, en posant } z = \sigma + jw :$$

$$\Re\left\{ \frac{\sigma + jw - 1}{\sigma + jw} \right\} < 0 \rightarrow \Re\left\{ \frac{(\sigma + jw - 1)(\sigma - jw)}{(\sigma + jw)(\sigma - jw)} \right\} < 0 \rightarrow \Re\left\{ \frac{\sigma^2 - \sigma + w^2 + jw}{\sigma^2 + w^2} \right\} < 0$$

$$\rightarrow \frac{\sigma^2 - \sigma + w^2}{\sigma^2 + w^2} < 0 \rightarrow \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + w^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ disque de rayon } \frac{1}{2} \text{ centré sur } \sigma = \frac{1}{2}, w = 0$$

Transposition analogique/numérique

M. TOMEZAK - cslul

Applications 3. Correspondance Pôles - Zéros 50

L'idée est d'imposer tout de même la relation $z_i = \exp(s_i T_e)$ aux pôles et aux zéros, quitte à introduire un facteur multiplicatif de façon qu'à basse fréquence (ou à une fréquence particulière donnée), $R(z)$ présente le même gain que $C(s)$.

Exemple : corriger le retard ($a < b$) ou à retard ($a > b$) de phase

$$C(s) = \frac{s+a}{s+b} \quad p_1 = -b, z_1 = -a \rightarrow p_1' = e^{-bT_e}, z_1' = e^{-aT_e} \quad \text{On aboutit à la forme : } \frac{z - e^{-aT_e}}{z - e^{-bT_e}}$$

On ajuste alors le gain en basse fréquence (ou à une fréquence donnée) :

$$C(s = j\omega = 0) \equiv R(z = e^{j\omega T_e} = 1)$$

$$\text{ici, } C(s = 0) = \frac{a}{b} \rightarrow \text{on multiplie par } \frac{a}{b} \frac{1 - e^{-bT_e}}{1 - e^{-aT_e}}$$

$$d'ou R(z) = \frac{a}{b} \frac{1 - e^{-bT_e}}{1 - e^{-aT_e}} \cdot \frac{z - e^{-aT_e}}{z - e^{-bT_e}}$$

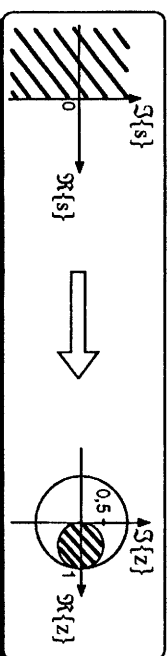
Remarque : si le d° q du dénominateur de $C(s)$ est strictement supérieur au d° p du numérateur, alors $C(s)$ tend vers zéro quand s tend vers l'infini. On convient dans ce cas de multiplier $R(z)$ par $(z+1)^{q-p}$. En effet, $s \rightarrow \infty$ correspond en numérique à $\omega \rightarrow \omega_{\max} = \pi/T_e$ (pulsation de Nyquist), soit $z = \exp(j\omega_{\max} T_e) = -1$. On s'arrange donc pour que $R(z = -1) = 0$. Bien sûr, il faut tenir compte de ce facteur lors de l'ajustement en basse fréquence, ce qui revient à multiplier en fait par : $\left(\frac{z+1}{2}\right)^{q-p}$. Avec cette méthode, la réponse fréquentielle du système discret pour ω compris entre 0 et $\omega_{\max}/2$ correspond à la réponse fréquentielle analogique pour ω compris entre 0 et l'infini. Ainsi, il n'y a pas de recouvrement spectral possible, et la forme générale de la réponse fréquentielle est conservée. Bien sûr, la stabilité est partiellement conservée.

Transposition analogique/numérique

M. TOMEZAK - cslul

Applications 3. Méthodes de quadrature (2) 52

Ainsi, le demi-plan gauche de Laplace est transformé en ce disque dans le plan en z , l'axe imaginaire limite de stabilité, correspondant pour sa part au cercle. Par conséquent, le cercle de rayon $1/2$ étant compris à l'intérieur du cercle unitaire, la transformation rectangulaire conserve la stabilité.



APPROXIMATION D'EULER (forward rectangular) :

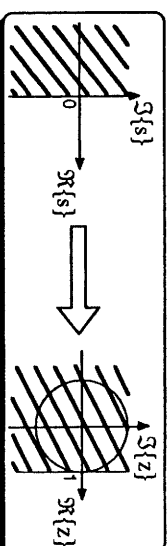
Une autre forme d'approximation rectangulaire est l'approximation d'Euler, qui exprime la dérivée par :

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

$$d'ou s \equiv \frac{z-1}{T_e} \text{ i.e } z \equiv 1 + sT_e$$

Sur le plan de la stabilité, un raisonnement similaire au précédent aboutit au résultat suivant :

$$\Re\{s\} < 0 \rightarrow \Re\{z\} < 1$$



Transposition analogique/numérique

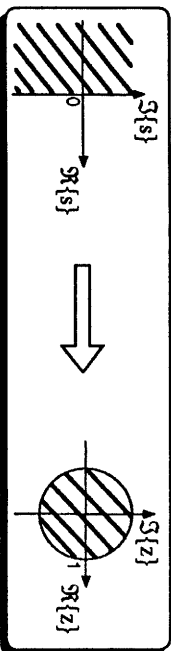
M. TOMEZAK - cslul

Par conséquent, avec cette méthode, l'équivalent discret d'un système continu stable ne l'est pas forcément. En pratique, cette approche n'est utilisée que pour discrétiser des systèmes intégrateurs purs (action I d'un PID).

APPROXIMATION TRAPÉZOÏDALE (dite aussi approximation de Tustin ou transformée bilinéaire)

Cette fois, on a : $x_k = x_{k-1} + \frac{T_e}{2}(x_k + x_{k-1})$ d'où $S \equiv \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$ i.e $z \equiv \frac{1+sT_e/2}{1-sT_e/2}$

Encore une fois par un raisonnement similaire, on montre que l'approximation trapézoïdale conserve parfaitement la stabilité puisque le demi-plan gauche de Laplace est transformé en disque unitaire dans le plan en z.



Remarque : les performances de cette méthode de discrétisation peuvent être nettement améliorées en corrigeant la distorsion de fréquence introduite par la transformation. C'est l'objet de la pré-compensation de distorsion.

Transformation analogique/numérique

M. Tomiczak - csl

PRÉ-COMPENSATION DE DISTORSION (prewarping)

Posons $s = j\omega_A$ et $z = \exp(j\omega_D T_e)$. La transformée bilinéaire précédente s'écrit :

$$j\omega_A \equiv \frac{2}{T_e} \frac{1-e^{-j\omega_D T_e}}{1+e^{-j\omega_D T_e}} = \frac{2}{T_e} \frac{e^{-j\omega_D T_e/2}(e^{j\omega_D T_e/2} - e^{-j\omega_D T_e/2})}{e^{-j\omega_D T_e/2}(e^{j\omega_D T_e/2} + e^{-j\omega_D T_e/2})} = \frac{2}{T_e} \frac{2j \sin(\omega_D T_e/2)}{2 \cos(\omega_D T_e/2)}$$

$$\equiv j \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{\omega_D T_e}{2}\right) \quad \text{d'où l'on tire :} \quad \omega_A \equiv \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{\omega_D T_e}{2}\right)$$

Cette dernière relation représente la distorsion de fréquence introduite par la transformée bilinéaire. Si $R(z)$ est la FT de l'équivalent discret du système continu de FT $C(s)$, on aura :

$$C(j\omega_A) = R(e^{j\omega_D T_e})$$

Si $\omega_D T_e$ petit (i.e $\omega_D \ll \omega_N = \omega_N/2$), on a : $\omega_A \equiv \frac{2}{T_e} \frac{\omega_D T_e}{2} = \omega_D$

La distorsion est donc faible à basse fréquence. Pour les fréquences plus élevées, on peut minimiser le phénomène de distorsion dans une bande fréquentielle d'intérêt en effectuant une pré-compensation, donc avant transformation. Par exemple, si la pulsation de coupure du système continu est ω_c , le système discrétisé coupera en ω'_c tel que :

$$\omega_c = \frac{2}{T_e} \tan \frac{\omega'_c T_e}{2} \quad \text{i.e} \quad \omega'_c = \frac{2}{T_e} \arctan \frac{\omega_c T_e}{2}$$

Pour éliminer la distorsion à ω_c ou à une pulsation spécifique ω_1 , on modifie la transformée avec un facteur d'échelle α tel que :

$$j\omega_1 = \alpha j \frac{2}{T_e} \tan \frac{\omega_1 T_e}{2} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{T_e}{2} \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T_e}{2}}$$

La transformée modifiée est alors donnée par :

$$S \equiv \frac{\omega_1}{2} \frac{z-1}{\omega_1 T_e z + 1}$$

Transformation analogique/numérique

M. Tomiczak - csl

Motivations - Définition :

Dans tous les champs d'application du traitement du signal, la Transformée de Fourier revêt une grande importance. Elle est particulièrement utile, voire indispensable, dans les domaines du filtrage linéaire, de l'analyse de corrélation et de l'analyse spectrale notamment. Pour un signal discret, on a établi précédemment (Signaux 1, 26) :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n} \quad x(n) = \int_0^1 X(f) e^{j2\pi f n} df$$

Problème : si on travaille en numérique, par exemple sur un ordinateur, ces deux relations présentent deux difficultés : la fréquence f varie continûment, et le nombre d'échantillons $x(n)$ est infini.

Solution : on va discrétiser la fréquence c'est à dire effectuer un **échantillonnage dans le domaine fréquentiel** (NB : on sait, v. 1, 28-29, que ceci entraîne une périodisation dans le domaine temporel), et on suppose le signal $x(n)$ de durée limitée.

La discrétisation s'effectue avec un pas d'échantillonnage $\Delta f = 1/N$, c'est à dire que l'on considère N points entre 0 et 1 :

$$f = \frac{k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{soit, si l'on travaille en pulsation : } \Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$$

Dans ces conditions, les deux relations précédentes peuvent s'écrire :

$$X\left(\frac{k}{N}\right) = X_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \quad \hat{x}(n) = \hat{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

M. Tomezak - esal

Applications 4. Motivations - Définition (fin)

Ainsi, par exemple pour $n = 0$, on en déduit : $\hat{x}(0) = x(0) + x(N) + x(-N) + x(2N) + x(-2N) + \dots$

On aura $\hat{x}(0) = x(0)$ si $x(N) = x(-N) = \dots = 0$, c'est à dire si le signal $x(n)$ s'annule à partir de $n = N$. Dans ce cas, on a également : $\hat{x}(1) = x(1), \hat{x}(2) = x(2), \dots$

Finalement, si le signal $x(n)$ est tel qu'il s'annule à partir de $n = N$, on peut écrire :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{En posant } w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \text{ il vient : } \begin{cases} x(n) = x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k w_N^{-nk}, & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ X(k) = X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n w_N^{nk}, & k = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

Paire de TFD d'ordre N $\longleftrightarrow$

$$\text{On note aussi : } F_D[x(n)] = X(k)$$

On peut aussi écrire la TFD sous forme matricielle. Soient X le vecteur colonne de dimension N constitué des $x(n)$ et X le vecteur colonne de dimension N contenant les $X(k)$, on a :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{N} X & \text{ou } W = \begin{bmatrix} w_N^{nk} \end{bmatrix} \text{ matrice } N \times N \text{ symétrique} \\ X = \frac{1}{N} W^* X \text{ ou } W^* = \begin{bmatrix} w_N^{-nk} \end{bmatrix} \text{ matrice conjuguée de } W \end{cases}$$

(même ligne = même colonne pour tout i et donc : $W = W^T$)

On en tire notamment : $X = \frac{1}{N} W X = \frac{1}{N} W^* X$, d'où $W W^* = N \cdot I$ et $W^{-1} = \frac{1}{N} W^*$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

M. Tomezak - esal

Applications 4. Motivations - Définition (suite)

On peut d'emblée noter que le signal discret $\hat{x}(n)$ précèdent est **N-périodique** :

$$\hat{x}(n+N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} (n+N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n} e^{j2\pi k} = \hat{x}(n)$$

= 1, k entier

Il est donc clair que, dans le cas général : $\hat{x}(n) \neq x(n)$

On peut toutefois se poser la question suivante : dans quel cas a-t-on l'égalité des 2 signaux sur une période ? Commençons par écrire la relation qui existe entre les deux :

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-j2\pi \frac{k}{N} m} e^{j2\pi \frac{k}{N} n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (m-n)} \right]$$

$$\text{Rappel : } \sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N & a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & a \neq 1 \end{cases} \quad \text{Si } a \text{ est de la forme } e^{-j2\pi \frac{m-n}{N}}, \text{ on a } a = 1 \text{ pour } m-n \text{ multiple de } N \text{ et, par ailleurs } a^N = 1. \text{ On en tire :}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{m-n}{N} k} = \begin{cases} 1 & m-n = iN, i \text{ entier} \\ 0 & \text{sinon (somme vectorielle des racines Nièmes de 1)} \end{cases}$$

D'où finalement :

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(n+iN)$$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

M. Tomezak - esal

Applications 4. Propriétés de la TFD

Il s'agit de propriétés homologues de celles vues dans le cas de la Transformée de Fourier.

N-périodicité : $X(k+N) = X(k)$ et $x(n+N) = x(n)$

$$\text{En effet : } \begin{aligned} X(k+N) &= \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{n(k+N)} x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{nk} w_N^{nN} x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{nk} x(n) = X(k), \text{ car } w_N^N = 1. \\ x(n+N) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} (n+N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n} e^{j2\pi k} = x(n). \end{aligned}$$

$$\text{De même : } x(n+N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{-k(n+N)} X(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{-nk} w_N^{-kN} X(k) = x(n).$$

Linéarité : $F_D[x(n) + \lambda y(n)] = F_D[x(n)] + \lambda F_D[y(n)]$

$$\text{En effet : } F_D[x(n) + \lambda y(n)] = W(x + \lambda y) = Wx + \lambda Wy = X + \lambda Y.$$

Translation temporelle circulaire : $F_D[x(n-m)] = w_N^{mk} X(k)$

En effet :

$$\begin{aligned} F_D[x(n-m)] &= \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{nk} x(n-m) = \sum_{\lambda=0}^{N-1} w_N^{(\lambda+m)k} x(\lambda) = w_N^{mk} \sum_{\lambda=0}^{N-1} w_N^{\lambda k} x(\lambda) \\ &= w_N^{mk} \left[\sum_{\lambda=0}^{N-1} w_N^{\lambda k} x(\lambda) \right] \end{aligned}$$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

M. Tomezak - esal

Applications 4. Propriétés de la TFD (suite)

59

On peut alors remarquer :

$$\sum_{\lambda=-m}^{-1} w_N^{\lambda k} x(\lambda) = \sum_{\lambda=N-m}^{N-1} w_N^{(\lambda-N)k} x(\lambda-N)$$

Or, $x(n)$ est théoriquement N -périodique, donc :

$$x(\lambda-N) = x(\lambda)$$

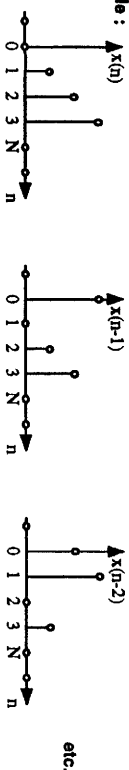
Et, par ailleurs : $w_N^{(\lambda-N)k} = w_N^{\lambda k} \cdot w_N^{-Nk} = w_N^{\lambda k}$ Donc, finalement : $\sum_{\lambda=-m}^{-1} w_N^{\lambda k} x(\lambda) = \sum_{\lambda=N-m}^{N-1} w_N^{\lambda k} x(\lambda)$

D'où le résultat cherché :

$$F_D[x(n-m)] = w_N^{mk} \left[\sum_{\lambda=N-m}^{N-1} w_N^{\lambda k} x(\lambda) + \sum_{\lambda=0}^{N-m-1} w_N^{\lambda k} x(\lambda) \right] = w_N^{mk} X(k)$$

Problème : en pratique, le signal x n'est a priori pas N -périodique. Dans ce cas, la propriété reste vérifiée si l'on procède à une **translation circulaire**, ce qui consiste à traduire le signal mais, en supposant qu'il est périodique et en gardant la même fenêtre (on peut aussi parler de **permutation circulaire**).

Exemple :



Avec un tel décalage circulaire, on aura $x(n-N) = x(n)$, même pour un signal non-périodique. D'où le résultat proposé précédemment :

$$F_D[x(n-m)N] = w_N^{mk} X(k) \text{ où } x(n-m)N = x((n-m) \bmod N)$$

Ainsi, dans l'exemple précédent ($N = 4$) : $x(n-2)_4 \rightarrow \begin{cases} n=0 & x(-2)_4 = x(2), & n=1 & x(-1)_4 = x(3) \\ n=2 & x(0)_4 = x(0), & n=3 & x(1)_4 = x(1) \end{cases}$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

M. Tonzak - csai

Applications 4. Propriétés de la TFD (suite)

61

Conservation du produit scalaire et relation de Parseval :

Si $F_D[x(n)] = X(k)$ et $F_D[y(n)] = Y(k)$, on peut écrire : $\underline{X} = \frac{1}{N} \underline{W}^* \underline{X}$ et $\underline{Y} = \frac{1}{N} \underline{W}^* \underline{Y}$

On en tire :

$$\langle \underline{X}, \underline{Y}^* \rangle = \underline{X}^T \underline{Y}^* = \frac{1}{N^2} \underline{X}^T \underline{W}^* \underline{W}^T \underline{Y}^* = \frac{1}{N^2} \underline{X}^T \underline{W}^* \underline{W} \underline{Y}^* \quad (\underline{W} \text{ symétrique})$$

Produit scalaire

Donc : **Conservation du produit scalaire :**

$$\langle \underline{X}, \underline{Y}^* \rangle = \underline{X}^T \underline{Y}^* = \frac{1}{N^2} \underline{X}^T \underline{N} \underline{I} \underline{N} \underline{Y}^* = \frac{1}{N} \underline{X}^T \underline{Y}^*$$

Ceci s'écrit également :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k)$$

D'où, en particulier pour $x(n) = y(n)$:

$$\text{Relation de Parseval : } \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

M. Tonzak - csai

Applications 4. Propriétés de la TFD (suite)

60

Par un raisonnement similaire, on peut établir :

$$\text{Translation fréquentielle circulaire : } F_D^{-1}[X(k-m)N] = w_N^{-mn} x(n)$$

Convolution circulaire :

$$x(n) \otimes y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) y(n-m)N = \sum_{m=0}^{N-1} y(m) x(n-m)N$$

$$F_D \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) y(n-m)N \right] = X(k) \cdot Y(k)$$

En effet, d'après la propriété de translation temporelle circulaire : $F_D[y(n-m)N] = w_N^{mk} Y(k)$ Donc :

$$F_D \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) y(n-m)N \right] = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) F_D[y(n-m)N] = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) w_N^{mk} Y(k) = X(k) \cdot Y(k)$$

On obtient, d'une manière homologue :

$$\frac{1}{N} F_D^{-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} X(m) Y(k-m)N \right] = x(n) \cdot y(n)$$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

M. Tonzak - csai

Applications 4. Propriétés de la TFD (fin)

62

Autres propriétés utiles (non démontrées) :

$$\text{Si } x(n) \text{ réel : } X(-k) = X^*(k) \quad N = X^*(k)$$

$$x(-n)_N \xleftrightarrow{TFD} X(-k)_N$$

$$x^*(n)_N \xleftrightarrow{TFD} X^*(-k)_N$$

$$x^*(-n)_N \xleftrightarrow{TFD} X^*(k)_N$$

Corrélation circulaire :

$$\phi_{xy}(m) \xleftrightarrow{TFD} \phi_{xy}^*(k) = X^*(k) \cdot Y(k)$$

$$\text{où : } \phi_{xy}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) y(n+m)N$$

Ceci se démontre en utilisant la propriété précédente et le fait que :

$$\phi_{xy}(m) = x^*(-n) \otimes y(n)$$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

M. Tonzak - csai

On cherche à présenter un moyen efficace de calculer la TFD de façon à optimiser l'algorithme, c'est à dire en réduisant au maximum le nombre d'opérations de base à effectuer. Un tel algorithme est dit de **Transformée de Fourier Rapide (TFR) ou algorithme FFT** (de l'anglais *Fast Fourier Transform*). Une première version a été proposée par Cooley et Tukey en 1965. Depuis, de nombreuses variantes ont été développées : algorithmes à **entrelacement temporel ou fréquentiel** (*decimation in time* ou *in frequency*), **Radix 2**, **Radix 4**, **Split Radix**, etc.

Remarque : le même algorithme peut être utilisé pour calculer la TFD inverse.

Rappel :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Dans le cas général ($x(n)$ complexe), et sans tenir compte des valeurs particulières prises par w_N^{nk} , le calcul basiste de cette expression, pour une seule valeur de k , requiert N multiplications complexes ($4N$ multiplications réelles) et $N - 1$ additions complexes (soit $4N - 2$ additions réelles). Pour les N valeurs de k , cela fait au total N^2 multiplications complexes et $N^2 - N$ additions complexes.

Le calcul direct est inefficace dans le sens où il n'exploite pas les propriétés de symétrie et de périodicité du facteur de phase (*twiddle factor*) w_N^k :

$$w_N^{k+N/2} = -w_N^k; \quad w_N^{k+N} = w_N^k$$

A titre d'exemple, on va considérer le cas de l'algorithme FFT Radix 2 à entrelacement temporel, qui est sans doute le plus courant. Comme son nom l'indique, il requiert un nombre N d'échantillons égal à une puissance de 2, mais permet de réduire le nombre d'opérations à $(N/2) \cdot \log_2 N$ multiplications complexes et $N \cdot \log_2 N$ additions complexes, soit, si $N = 2^m$, $m \cdot N/2$ multiplications et $m \cdot N$ additions.

Exemple : Pour $N = 1024 = 2^{10}$, on aura 5120 multiplications au lieu de 1,048,576, soit une diminution par un facteur 204,8 du temps de calcul.

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

M. Tonzak - ead

Le calcul direct de $F(k)$ requiert $(N/2)^2$ multiplications complexes. Il en va de même pour $G(k)$. De plus, il faut $N/2$ multiplications complexes pour le calcul des produits par w_N^k .

Total : $2 \cdot \left(\frac{N}{2}\right)^2 + \frac{N}{2} = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$ multiplications complexes (au lieu de N^2)

Bien sûr, on peut réitérer le processus précédent sur chaque TFD d'ordre $N/2$, et ainsi de suite. Si $N = 2^m$, on peut effectuer m fois ce processus. A l'étape suivante, on aura 4 TFD d'ordre $N/4$, soit $N/4 + 2 \cdot N/2$ multiplications complexes. Puis, $N/8 + 3 \cdot N/2$, ... jusqu'à $m \cdot N/2$ (le terme N restant correspond à des multiplications par 1).

Exemple : considérons le cas où $N = 8$. Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

avec W de la forme :

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ w & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 & w^7 \\ w^2 & w^4 & w^6 & w^8 & w^{10} & w^{12} & w^{14} & w^{14} \\ w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} & w^{15} & w^{18} & w^{21} & w^{21} \\ w^4 & w^8 & w^{12} & w^{16} & w^{20} & w^{24} & w^{28} & w^{28} \\ w^5 & w^{10} & w^{15} & w^{20} & w^{25} & w^{30} & w^{35} & w^{35} \\ w^6 & w^{12} & w^{18} & w^{24} & w^{30} & w^{36} & w^{42} & w^{42} \\ w^7 & w^{14} & w^{21} & w^{28} & w^{35} & w^{42} & w^{49} & w^{49} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ w & w^2 & w^3 & -1 & -w & -w^2 & -w^3 & -w^3 \\ w^2 & -1 & -w^2 & 1 & w^2 & -1 & -w^2 & -w^2 \\ w^3 & -w^2 & w & -1 & -w^3 & w^2 & -w & -w \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -w & w^2 & -w^3 & -1 & w & -w^2 & w^3 \\ -w^2 & -1 & w^2 & 1 & -w^2 & -1 & w^2 & w^2 \\ 1 & -w^3 & -w^2 & -w & -1 & w^3 & w^2 & w \end{bmatrix}$$

(en utilisant les propriétés de w_N)

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

M. Tonzak - ead

Principe de l'algorithme : Le signal $x(n)$ est décomposé en 2 suites entrelacées $x(2i)$ (termes pairs) et $x(2i+1)$ (termes impairs). On a alors :

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i)w_N^{k \cdot 2i} + \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1)w_N^{k(2i+1)}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

Comme $w_N^2 = w_{N/2}$: $X(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i)w_{N/2}^{ki} + w_N^k \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1)w_{N/2}^{ki}$, $k = 0, \dots, N-1$

Cette relation montre que le calcul de $X(k)$ se décompose en 2 calculs de TFD d'ordre $N/2$ (donc 2 séquences périodiques de période $N/2$). En posant $f(n) = x(2n)$ et $g(n) = x(2n+1)$, $n = 0, 1, \dots, N/2-1$, il vient :

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} f(i)w_{N/2}^{ki} + w_N^k \sum_{i=0}^{N/2-1} g(i)w_{N/2}^{ki} = F(k) + w_N^k G(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

où : $f(n) \xrightarrow{\text{TFD}} F(k)$ et $g(n) \xrightarrow{\text{TFD}} G(k)$

$F(k)$ et $G(k)$ étant $N/2$ -périodiques : $F(k + N/2) = F(k)$ et $G(k + N/2) = G(k)$

Comme de plus, $w_N^{k+N/2} = -w_N^k$, la relation précédente s'écrit :

$$\begin{cases} X(k) = F(k) + w_N^k G(k) & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ X(k + \frac{N}{2}) = F(k) - w_N^k G(k) & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \end{cases}$$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

M. Tonzak - ead

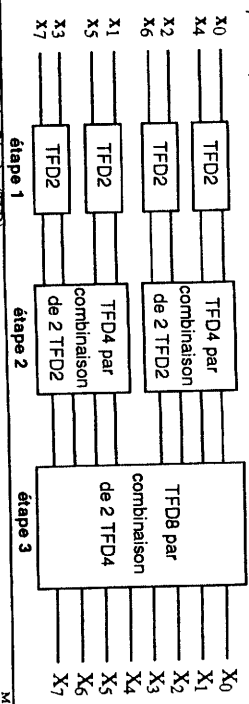
On en tire :

$$\begin{aligned} X_0 &= (x_0 + x_4) + (x_2 + x_6) + (x_1 + x_5) + (x_3 + x_7) \\ X_1 &= (x_0 - x_4) + w^2(x_2 - x_6) + w(x_1 - x_5) + w^3(x_3 - x_7) \\ X_2 &= (x_0 + x_4) - (x_2 + x_6) + w^2(x_1 + x_5) - w^2(x_3 + x_7) \\ X_3 &= (x_0 - x_4) - w^2(x_2 - x_6) + w^3(x_1 - x_5) + w(x_3 - x_7) \\ X_4 &= (x_0 + x_4) + (x_2 + x_6) - (x_1 + x_5) - (x_3 + x_7) \\ X_5 &= (x_0 - x_4) + w^2(x_2 - x_6) - w(x_1 - x_5) - w^3(x_3 - x_7) \\ X_6 &= (x_0 + x_4) - (x_2 + x_6) - w^2(x_1 + x_5) + w^2(x_3 + x_7) \\ X_7 &= (x_0 - x_4) - w^2(x_2 - x_6) - w^3(x_1 - x_5) - w(x_3 - x_7) \end{aligned}$$



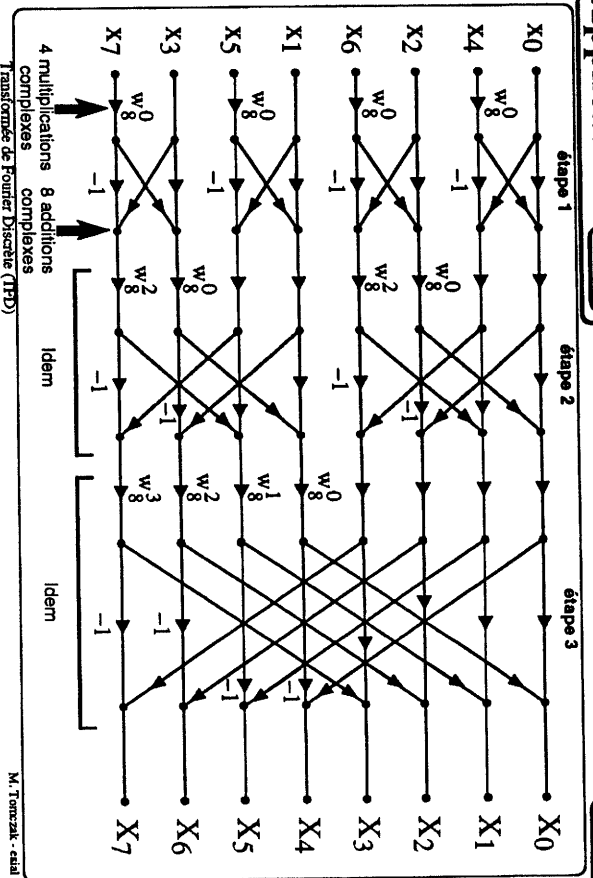
Différence de signe devant les termes impairs

Schématiquement, on va réaliser :

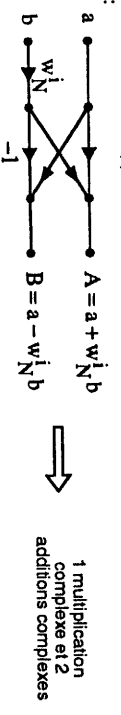


Transformée de Fourier Discrète (TFD)

M. Tonzak - ead



Remarque : la cellule de base, appelée croisillon (ou butterfly, d'où le nom d'algorithme "papillon"), est de la forme :



Pour $N = 2^m$, il y a $N/2$ croisillons par étape et $\log_2(N)$ étapes.

Remarque : les calculs sont faits "en place" (A et B peuvent être stockés à la place de a et b), on a donc besoin de $2N$ registres (N nombres complexes).

Remarque : l'arrangement de la suite des entrées x_n peut être obtenu immédiatement en codant n de manière binaire et en inversant l'ordre des bits.

Exemple : $N = 8$

n	code binaire	inversion	ordre TFR
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Remarques : - il existe aussi des algorithmes utilisant une décomposition en fréquence.
- l'algorithme peut bien sûr être utilisé en TFD inverse.

Transformée de Fourier Discrète (TFD)