UNIVERSITE H. POINCARE, NANCY 1 ESIAL 1ère année

Corrigé de l'EXAMEN S.I.C. (Signal – Information – Communication)

Tous documents autorisés 17 avril 2006

Durée : 2 heures P. SIBILLE - M. TOMCZAK

Exercice 1 : création d'un signal sous Matlab

Expliquer précisément ce que réalise le programme Matlab suivant :

```
Fs = 100;
t = (1:100)/Fs;
f = [ 2; 15; 25];
A = [.5  .9  .8];
x = A*sin(2*pi*f*t);
b=randn(size(x));
b=b/std(b);
x=x+b;
```

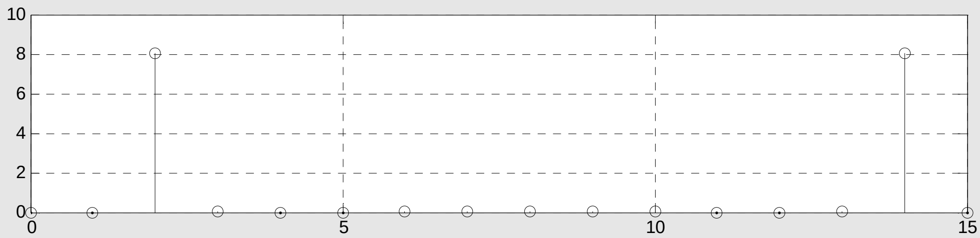
Quel est le rapport signal sur bruit du signal résultant ?

Ce programme est destiné à créer un signal constitué par la somme de 3 sinusoïdes, d'amplitudes respectives 0.5, 0.9 et 0.8, et de fréquences respectives 2 Hz, 15 Hz et 25 Hz. En effet, la dimension de f étant (3,1), celle de A étant (1,3), et celle de t étant (1,100), la dimension du terme sin(2πft) est (3,100). Il correspond donc à une matrice contenant, sur ses 3 lignes, 3 sinusoïdes de 100 points. Le signal x résultant est de dimension (1,100) et correspond bien à la somme des 3 signaux pré multipliés par l'amplitude correspondante. Le nombre d'échantillons est donc de 100 et la fréquence d'échantillonnage est de 100 Hz. Enfin, un bruit blanc gaussien de variance unitaire est superposé aux sinusoïdes. La puissance du signal comprenant les 3 sinus est égale à la somme des 3 puissances correspondantes soit : $\frac{0{,}5^2}{2}+\frac{0{,}9^2}{2}+\frac{0{,}8^2}{2}=0{,}85$. La puissance du bruit étant unitaire, le rapport signal sur bruit est donc de 0,85 soit environ -0,7 dB.

Exercice 2 : analyse spectrale d'une sinusoïde sous Matlab

a) Compléter la séquence d'instructions Matlab suivante de telle manière que le résultat soit celui présenté sur la figure.

```
N=16; Te=.00390625;
k=0:?;
x=sin(2*pi*?*k*Te);
X=fft(x); magX=abs(X);
stem(k,magX),grid
```



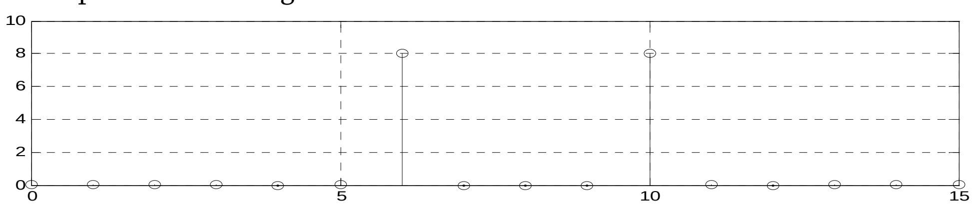
Le nombre de points du spectre étant de 16, on a immédiatement : `k=0:15; ou k=0:N-1;`

La fréquence d'échantillonnage est de 1/Te soit 256 Hz, l'intervalle entre deux points successifs étant de 1/NTe = 16 Hz, il devient clair que la fréquence est de 32 Hz : `x=sin(2*pi*32*k*Te);`

b) Représenter le résultat de l'instruction suivante :

```
stem(k,fftshift(magX))
```

Le résultat est représenté sur la figure suivante.



c) Donner les instructions nécessaires à partir de la séquence initiale pour obtenir un graphe correctement gradué en fréquence absolue.

```
f = (0 : N-1)/(N*Te); stem(f,magX),grid
```

d) Dites en quoi le résultat présenté sur la figure du a) vous paraît normal ou non, comment l'interpréter ?

La figure présente un (mauvais) échantillonnage d'une superposition de sinus cardinaux. Ces derniers proviennent de la convolution entre le spectre de la sinusoïde et celui de la fenêtre rectangulaire limitant la durée du signal. Le résultat visible ressemble étrangement à deux impulsions, ceci est dû au fait que la fréquence de la sinusoïde est un multiple de 1/NTe.

e) Par quel procédé obtenir un tracé plus précis du spectre ?

La solution consiste à effectuer un "zero-padding", c'est-à-dire à compléter le signal initial avec un nombre suffisant de valeurs nulles.

Exercice 3 : échantillonnage d'un signal sinusoïdal continu

Un signal modulé en amplitude, $x(t) = \sin(4\omega_0 t).\cos(2\omega_0 t)$, est échantillonné avec une période $T_e=\pi/(3\omega_0)$.

a) Déterminer les fréquences f, $0 \le f \le 3\omega_0/(2\pi)$, présentes dans le signal échantillonné.

b) Le théorème d'échantillonnage a-t-il été respecté ?

Rappel : $\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) = \dfrac{\sin p + \sin q}{2}$.

a,b) $x(t) = \dfrac{e^{j4\omega_0 t} - e^{-j4\omega_0 t}}{2j}.\dfrac{e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{j6\omega_0 t} - e^{-j6\omega_0 t}}{2j} + \dfrac{e^{j2\omega_0 t} - e^{-j2\omega_0 t}}{2j}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(6\omega_0 t) + \sin(2\omega_0 t)\right)$.

Les fréquences présentes AVANT échantillonnage sont donc $2f_0$ et $6f_0$ avec $f_0=\omega_0/2\pi$, c'est-à-dire $\dfrac{\omega_0}{\pi}$ et $\dfrac{3\omega_0}{\pi}$.

La fréquence d'échantillonnage étant $f_e = \dfrac{3\omega_0}{\pi}$, il est clair que celle-ci est trop faible pour assurer un échantillonnage sans repliement spectral de la seconde fréquence (théorème de Shannon non respecté). Le spectre de $x(t)$ est constitué de 2 Dirac de mesure $\pi/2$ en $\omega=-2\omega_0$ et $-6\omega_0$, et de 2 Dirac de mesure $-\pi/2$ en $\omega=2\omega_0$ et $6\omega_0$. APRÈS échantillonnage idéal, on retrouve ces mêmes Dirac, ainsi que leurs répliques, aux mêmes pulsations $\pm n\omega_e\,(n=0,1,2,\ldots)$. Comme $\omega_e=6\omega_0$, ne subsistent dans l'intervalle limité par la pulsation de Nyquist $\omega_N=\omega_e/2$, que 2 Dirac, aux pulsations $-2\omega_0$ et $+2\omega_0$ (fréquences $\pm\omega_0/\pi$), de mesures respectives $\pi/2$ et $-\pi/2$ (les 2 Dirac apparaissant par repliement à la fréquence zéro se compensent puisqu'ils sont de signe opposé). Finalement, la seule fréquence présente après échantillonnage dans l'intervalle $\left[0, 3\omega_0/2\pi\right]$ est $2\omega_0$.

Exercice 4 : transformée de Laplace

Calculer la transformée de Laplace du signal $x(t) = A.e^{-7t}.\cos^2(3t).\mathbb{1}(t)$

On a : $x(t) = A.e^{-7t}.\dfrac{1+\cos 6t}{2}.\mathbb{1}(t) = \dfrac{A}{2}.\left(e^{-7t} + e^{-7t}.\cos 6t\right)\mathbb{1}(t)$, d'où : $\boxed{X(s) = \dfrac{A}{2}.\left(\dfrac{1}{s+7} + \dfrac{s+7}{(s+7)^2+36}\right)}$.

Exercice 5 : inversion de la transformée de Laplace

Déterminer l'original temporel de la transformée de Laplace suivante : $F(s) = \dfrac{s+10}{(s+3)(s^2+2s+4)}$.

A priori, la décomposition en éléments simples de $F(s)$ s'écrit : $F(s) = \dfrac{a}{s+3} + \dfrac{bs+c}{s^2+2s+4}$. En multipliant les deux membres de cette équation par $(s+3)$ et en posant $s=-3$, il vient : $a=1$. En posant ensuite $s=0$ dans l'équation de départ et en identifiant les deux membres, il vient $c=2$. Une autre valeur particulière, par exemple $s=-10$, permet d'établir $b=-1$. Finalement : $F(s) = \dfrac{1}{s+3} - \dfrac{s-2}{s^2+2s+4}$. On cherche ensuite à faire apparaître des éléments simples correspondant à des transformées connues :

$$F(s)=\frac{1}{s+3}-\frac{s+1}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}.$$

On en déduit : $\boxed{f(t)=\left(e^{-3t}-e^{-t}.\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}.e^{-t}.\sin\sqrt{3}t\right)\mathbb{1}(t)}$.

Exercice 6 : réponse impulsionnelle d'un système à temps discret

a) Soit le système invariant linéaire à temps discret de fonction de transfert $G(z)=\dfrac{z+2}{z^2-2z+4}$*, établir l'expression analytique de sa réponse impulsionnelle.*

Les pôles de G(z) étant complexes, on cherche à faire apparaître des transformées de type sinus et/ou cosinus : $G(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)^2+3}=\dfrac{z-1}{(z-1)^2+3}+\dfrac{3}{(z-1)^2+3}=z^{-1}.\dfrac{z(z-1)}{(z-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{3}.z^{-1}.\dfrac{\sqrt{3}.z}{(z-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$. D'après les formules vues en TD, on a ici : $\alpha=1,\beta=\sqrt{3}$ d'où : $\rho\cos\theta=1$ et $\rho\sin\theta=\sqrt{3}$, c'est-à-dire : $\rho=2,\theta=\pi/3$. On en tire finalement : $\boxed{g(k)=\left(2^{k-1}.\cos\left((k-1).\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}.2^{k-1}.\sin\left((k-1).\frac{\pi}{3}\right)\right).\mathbb{1}(k-1)}$.

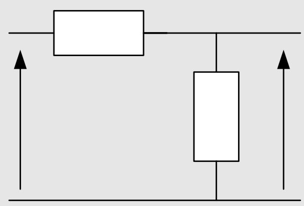
Rappelons que ce résultat peut s'écrire de différentes manières.

b) Établir la relation de récurrence entrée/sortie du système précédent et en déduire les 4 premières valeurs de la réponse impulsionnelle.

On a : $G(z)=\dfrac{z+2}{z^2-2z+4}=\dfrac{z^{-1}+2z^{-2}}{1-2z^{-1}+4z^{-2}}=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$, d'où : $Y(z)\left(1-2z^{-1}+4z^{-2}\right)=X(z)\left(z^{-1}+2z^{-2}\right)$. On en tire la relation de récurrence : $y(k)-2y(k-1)+4y(k-2)=x(k-1)+2x(k-2)$. On obtient alors les valeurs successives pour $k=0,1,2,3$: $\boxed{y(0)=0,y(1)=1,y(2)=4,y(3)=4.}$

Exercice 7 : réponses d'un système continu

Soit le filtre RL représenté sur la figure ci-après, d'entrée x(t) et de sortie y(t).
a) Déterminer sa fonction de transfert $G(s)$.
b) Montrer que sa réponse impulsionnelle est donnée par $g(t)=\delta(t)-\dfrac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}.\mathbb{1}(t)$.
c) Établir l'expression de sa réponse indicielle.



a) On a : $X(s)=R.I(s)+Ls.I(s)$; $Y(s)=Ls.I(s)$; d'où $G(s)\overset{\Delta}{=}\dfrac{Y(s)}{X(s)}\boxed{=\dfrac{Ls}{R+Ls}=\dfrac{s}{s+R/L}}$.

b) En remarquant que $G(s)=1-\dfrac{R/L}{s+R/L}$, le résultat cherché vient immédiatement par transformée de Laplace inverse.

c) La réponse indicielle est la réponse à un échelon, on a donc :

$Y(s)=G(s)X(s)=\dfrac{s}{s+R/L}.\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{s+R/L}$, d'où : $\boxed{y(t)=e^{-\frac{R}{L}t}.\mathbb{1}(t)}$.

Exercice 8 : performances d'un système continu du 2ème ordre

Déterminer le taux de premier dépassement et la pulsation de résonance du filtre de fonction de transfert $G(s)=\dfrac{100\pi^2}{s^2+10\pi s+100\pi^2}$.

Ce filtre est un 2ème ordre pseudopériodique de forme standard : $\dfrac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$, donc de pulsation propre $\omega_0=10\pi$ et de coefficient d'amortissement $\zeta=0{,}5$. Le taux de 1er dépassement et la pulsation de résonance sont donnés par :

$$\boxed{D_1=100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=100e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\approx 16{,}3\% \;;\; \omega_R=\omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}=\frac{10\pi}{\sqrt{2}}\approx 22{,}214\text{rad./s.}}$$

Questions de cours :

1) Quel rôle exact joue le filtre anti-repliement dans le processus d'échantillonnage ?

Le filtre anti-repliement est destiné à limiter le support spectral du signal à échantillonner, afin d'empêcher les problèmes de repliement spectral. Le repliement spectral résulte de la périodisation du spectre entraînée par l'échantillonnage. Lorsque le spectre est à support limité, les recouvrements spectraux peuvent être évités en fixant la fréquence d'échantillonnage à une valeur supérieure au double de la fréquence maximale.

2) Que vaut le temps de pic d'un système continu du 2ème ordre, d'amortissement 0,5 et de pulsation propre $\sqrt{3}.\pi$?

Le temps de pic ou temps de premier dépassement est donné dans ce cas par :

$$\boxed{\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}\pi\sqrt{1-0{,}25}}=\frac{2}{3}\approx 0{,}66\ s.}$$

3) Dans quel cas la transformée de Fourier d'un signal est-elle périodique ?

Dans le cas d'un signal à temps discret, donc en particulier pour un signal échantillonné.

4) Montrer que la densité spectrale d'énergie d'un signal continu est égale au carré du module de sa transformée de Fourier.

Par définition, la densité spectrale d'énergie d'un signal à énergie finie est égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation : $\Phi_x(\omega)=F[\phi_x(\tau)]$. Or, la fonction d'autocorrélation peut s'écrire comme un produit de convolution : $\phi_x(\tau)=x^*(-t)*x(t)$.

On en tire : $\Phi_x(\omega)=F[x^*(-t)*x(t)]=F[x^*(-t)]F[x(t)]=X^*(f).X(f)=|X(f)|^2$.

5) Donner un exemple de signal à bande étroite et un exemple de signal à bande large.

Exemple de signal à bande étroite : sinusoïde. Exemples de signaux à bande large : bruit blanc, impulsion de Dirac.

6) Soit un signal à temps discret. Expliquer les différences entre sa transformée de Fourier, sa transformée de Fourier discrète et sa transformée de Fourier rapide.

Soit $x(k)$ un signal à temps discret, sa transformée de Fourier est définie par : $X(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n).e^{-j2\pi nf}$ où la fréquence f est une variable continue. La transformée de Fourier discrète de $x(k)$ est une approximation discrète de $X(f)$ dans laquelle la fréquence est discrétisée et le nombre de termes de la somme est fini et égal à N : $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n).e^{-j2\pi\frac{k}{N}n}$. La transformée de Fourier rapide de $x(k)$ n'est rien d'autre que sa transformée de Fourier discrète, le terme "rapide" précise simplement que l'algorithme utilisé pour effectuer le calcul de la transformée discrète est un algorithme optimisé du point de vue du nombre d'opérations effectuées.