CORRIGE EXAMEN S.I.C. (Signal – Information – Communication) du 29 avril 2003

Exercice 1 :

Expliquer précisément ce que réalise le programme Matlab suivant :

```
Fs = 100;
t = (1:100)/Fs;
f = [ 2; 15; 25];
A = [.5  .9  .8];
x = A*sin(2*pi*f*t);
b=randn(size(x));
b=b/std(b);
x=x+b;
```

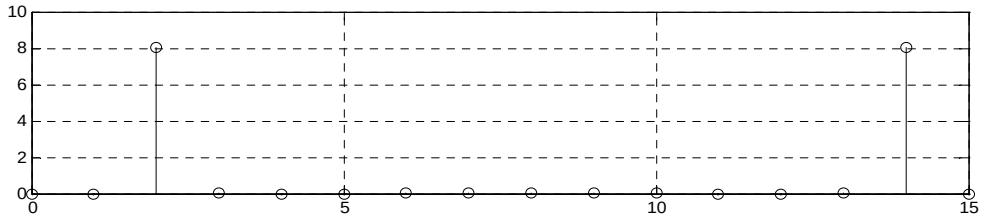
Quel est le rapport signal sur bruit du signal résultant ?

Ce programme est destiné à créer un signal constitué par la somme de 3 sinusoïdes, d'amplitudes respectives 0.5, 0.9 et 0.8, et de fréquences respectives 2 Hz, 15 Hz et 25 Hz. En effet, la dimension de f étant (3,1), celle de A étant (1,3), et celle de t étant (1,100), la dimension du terme sin(2πft) est (3,100). Il correspond donc à une matrice contenant, sur ses 3 lignes, 3 sinusoïdes de 100 points. Le signal x résultant est de dimension (1,100) et correspond bien à la somme des 3 signaux pré multipliés par l'amplitude correspondante. Le nombre d'échantillons est donc de 100 et la fréquence d'échantillonnage est de 100 Hz. Enfin, un bruit blanc gaussien de variance unitaire est superposé aux sinusoïdes. La puissance du signal comprenant les 3 sinus est égale à la somme des 3 puissances correspondantes soit : $\frac{0{,}5^2}{2}+\frac{0{,}9^2}{2}+\frac{0{,}8^2}{2}=0{,}85$. La puissance du bruit étant unitaire, le rapport signal sur bruit est donc de 0,85 soit environ -0,7 dB.

Exercice 2 :

a) Compléter la séquence d'instructions Matlab suivante de telle manière que le résultat soit celui présenté sur la figure.

```
N=16; Te=.00390625;
k=0:?;
x=sin(2*pi*?*k*Te);
X=fft(x); magX=abs(X);
stem(k,magX),grid
```



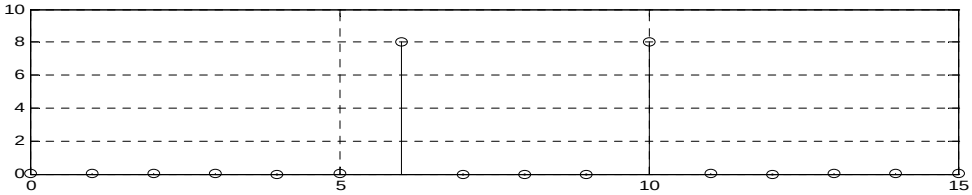
Le nombre de points du spectre étant de 16, on a immédiatement : `k=0:15;` ou `k=0:N-1;`

La fréquence d'échantillonnage est de 1/Te soit 256 Hz, l'intervalle entre deux points successifs étant de 1/NTe = 16 Hz, il devient clair que la fréquence est de 32 Hz : `x=sin(2*pi*32*k*Te);`

b) Représenter le résultat de l'instruction suivante :

```
stem(k,fftshift(magX))
```

Le résultat est représenté sur la figure suivante.



c) Donner les instructions nécessaires à partir de la séquence initiale pour obtenir un graphe correctement gradué en fréquence absolue.

```
f = (0 : N-1)/(N*Te); stem(f,magX),grid
```

d) Dites en quoi le résultat présenté sur la figure du a) vous paraît normal ou non, comment l'interpréter ?

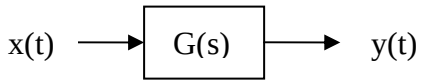
La figure présente un (mauvais) échantillonnage d'une superposition de sinus cardinaux. Ces derniers proviennent de la convolution entre le spectre de la sinusoïde et celui de la fenêtre rectangulaire limitant la durée du signal. Le résultat visible ressemble étrangement à deux impulsions, ceci est dû au fait que la fréquence de la sinusoïde est un multiple de 1/NTe.

e) Par quelle opération obtenir un tracé plus précis du spectre ?

La solution consiste à effectuer un "zero-padding", c'est-à-dire à compléter le signal initial avec un nombre suffisant de valeurs nulles.

Exercice 3 :

On considère le système continu invariant linéaire suivant, de réponse impulsionnelle g(t) :



a) Exprimer la fonction d'intercorrélation $r_{xy}(\tau)$ sous forme d'un produit de convolution. De même, exprimer la sortie y(t) comme un produit de convolution. En déduire la relation suivante : $r_{xy}(\tau)=r_x(\tau)*g(\tau)$, où $r_x(\tau)$ désigne la fonction d'autocorrélation (FA) de x(t).

Par définition : $r_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau) = x(-\tau) * y(\tau)$. Par ailleurs, on sait : $y(t) = x(t) * g(t)$, où $g(t)$ désigne la réponse impulsionnelle du système. On en tire alors :

$r_{xy}(\tau) = x(-\tau) * y(\tau) = x(-\tau) * x(\tau) * g(\tau) = r_x(\tau) * g(\tau)$.

b) De façon similaire, exprimer la FA de la sortie $r_y(\tau)$ en fonction des FAs de l'entrée et de la réponse impulsionnelle.

De même : $r_y(\tau) = y(-\tau) * y(\tau) = x(-\tau) * g(-\tau) * x(\tau) * g(\tau) = r_x(\tau) * g(\tau) * g(-\tau) = r_x(\tau) * r_g(\tau)$.

Exercice 4 :

a) En quoi consiste la technique du "zero-padding" ou "zero filling" ? Quelle est son utilité ?

Cette technique consiste à compléter une séquence initiale avec un nombre relativement important de valeurs nulles. Cela permet d'améliorer le tracé du spectre (résolution apparente) en augmentant artificiellement le nombre de points sur lequel est calculée la transformée de Fourier discrète, ce qui permet notamment de lever certaines ambiguïtés.

b) Quelle est l'influence des différentes fenêtres (rectangulaire, Blackman, Tchebychev, etc.) sur l'analyse spectrale de signaux sinusoïdaux ? Quel compromis est recherché ?

L'utilisation d'une fenêtre rectangulaire est implicite lors de la limitation en durée d'un signal, d'où son autre appellation de fenêtre naturelle. Dans le domaine spectral, cette limitation se traduit par une convolution par un sinus cardinal, ce dernier étant caractérisé par un lobe principal et des lobes secondaires. L'utilisation d'autres types de fenêtres permet alors de chercher le meilleur compromis entre la largeur du lobe principal et la hauteur des lobes secondaires, étant entendu que la largeur du lobe principal influence directement la résolution fréquentielle, et que plus la hauteur des lobes secondaires est importante, plus grands sont les risques d'erreur. La fenêtre rectangulaire présente, quant à elle, le lobe principal le plus étroit, mais aussi les lobes secondaires les plus prononcés.

Exercice 5 :

Soit un système linéaire utilisé pour filtrer un signal x(t) donné. On suppose que la réponse impulsionnelle du filtre est $g(t)=x(t_0-t)$, t_0 étant une constante.

a) Montrer que la réponse y(t) du filtre au signal d'entrée x(t) est donnée par : $y(t)=\phi_x(t_0-t)$*, où $\phi_x(\tau)$ désigne la fonction d'autocorrélation de x(t).*

La réponse y(t) du système est donnée par le produit de convolution entre x(t) et la réponse impulsionnelle g(t) : $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Or, on a $g(\tau)=x(t_0-\tau)$, donc :

$g(t-\tau)=x(t_0-(t-\tau))=x(\tau+t_0-t)$. Il vient alors :

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)x(\tau+t_0-t)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)x(\tau+(t_0-t))d\tau=\phi_x(t_0-t)$$

b) Quel est, selon vous, l'intérêt d'un tel filtre ?

Lorsque ce filtre est soumis au signal d'intérêt, même bruité, sa sortie présente un maximum en $t=t_0$, ce qui permet de détecter la présence du signal recherché.

Exercice 6 :

Un signal modulé en amplitude, $x(t)=\sin(4\omega_0 t).\cos(2\omega_0 t)$*, est échantillonné avec une période $T_e=\pi/(3\omega_0)$.*

a) Déterminer les fréquences f, $0 \le f \le 3\omega_0/(2\pi)$, présentes dans le signal échantillonné.

On a $x(t)=\sin(4\omega_0 t).\cos(2\omega_0 t)=0{,}5\sin(6\omega_0 t)+0{,}5\sin(2\omega_0 t)$. Les 2 fréquences présentes dans le signal initial sont donc $\frac{\omega_0}{\pi}$ et $\frac{3\omega_0}{\pi}$. On sait par ailleurs : $F[\sin\omega_0 t]=j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$. Le spectre de x(t) est donc constitué de 2 Dirac de mesure $\pi/2$ en $\omega=-2\omega_0$ et $-6\omega_0$, et de 2 Dirac de mesure $-\pi/2$ en $\omega=2\omega_0$ et $6\omega_0$. Après échantillonnage idéal, on retrouve ces mêmes Dirac, ainsi que leurs répliques, aux mêmes pulsations $\pm n\omega_e$ $(n=0,1,2,...)$. Dans le cas présent, $\omega_e=6\omega_0$, ne subsistent donc dans l'intervalle limité par la pulsation de Nyquist $\omega_N=\omega_e/2$, que 2 Dirac aux pulsations $-2\omega_0$ et $2\omega_0$, de mesures respectives $\pi/2$ et $-\pi/2$ (les 2 Dirac en $\omega=0$ se compensent). Finalement, la seule fréquence présente qui soit dans l'intervalle $[0\ 3\omega_0/2\pi]$ est $\frac{\omega_0}{\pi}$.

b) Le théorème d'échantillonnage a-t-il été respecté ?

Le théorème de Shannon n'a pas été respecté, du moins sur la seconde composante, ce qui explique sa disparition. Pour pouvoir préserver cette composante, la fréquence d'échantillonnage doit être strictement supérieure au double de sa fréquence, c'est-à-dire $f_e=1/T_e>2.\frac{3\omega_0}{\pi}=\frac{6\omega_0}{\pi}$.

Exercice 7 :

On suppose que la période d'échantillonnage $T_e=1$.

a) Discrétiser le système continu de fonction de transfert $G(s)=\frac{1}{(s+0{,}6)^2+(0{,}8)^2}$ *par la technique de correspondance pôles-zéros.*

La fonction de transfert G(s) ne présente aucun zéro. Ses pôles sont donnés par $p_{1,2} = -0{,}6 \pm 0{,}8j$. On en déduit : $G(z) = K\dfrac{(z+1)^2}{(z-e^{-p_1T_e})(z-e^{-p_2T_e})} \approx 0{,}134\dfrac{(z+1)^2}{z^2-0{,}7647z+0{,}301}$.

b) Comparer ce résultat avec celui donné par l'approximation de Tustin.

On a directement : $G(z) = \dfrac{1}{\dfrac{4}{T_e^2}.\dfrac{(z-1)^2}{(z+1)^2}+\dfrac{2{,}4}{T_e}.\dfrac{z-1}{z+1}+1} \approx 0{,}135\dfrac{(z+1)^2}{z^2-0{,}81z+0{,}35}$.

c) Quelle modification apporter à l'approximation de Tustin si l'on souhaite effectuer une pré-compensation de distorsion à une fréquence donnée f_0 ?

La transformée modifiée est donnée par : $s \equiv \dfrac{2\pi f_0}{\tan \pi f_0 T_e}\dfrac{z-1}{z+1}$.

Exercice 8 :

Soit un système de modulation d'amplitude dont la réponse au signal d'entrée x(t) est le signal s(t)=x(t).y(t).

a) Montrer que si $y(t) = e^{j\omega_m t}$*, la transformée de Fourier S(ω) de s(t) est donnée par X(ω-ω$_m$), où X(ω) désigne la transformée de Fourier de x(t). Vérifier que la démodulation peut être obtenue par multiplication par* $e^{-j\omega_m t}$.

On a directement $S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\omega_m t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_m)t}dt = X(\omega-\omega_m)$.

Ou bien encore : $F[x.y] = \dfrac{1}{2\pi}X(\omega) * 2\pi\delta(\omega-\omega_m) = X(\omega-\omega_m)$.

Bien sûr : $s(t).e^{-j\omega t} = x(t).e^{j\omega t}.e^{-j\omega t} = x(t)$.

b) On module à présent x(t) par $y(t) = \cos(\omega_m t)$*. Montrer que la démodulation peut alors être réalisée par un multiplieur par* $\cos(\omega_m t)$ *suivi d'un filtre passe-bas.*

On a $s(t) = x(t).\cos\omega_m t$. Donc $F[s(t).\cos\omega_m t] = F[x(t).\cos^2\omega_m t] = \dfrac{1}{2\pi}X(\omega) * F[\cos^2\omega_m t]$.

En remarquant que :

$$F[\cos^2\omega_m t] = F\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\omega_m t\right] = F\left[\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}F[\cos 2\omega_m t] = \pi\delta(\omega)+\frac{\pi}{2}\big(\delta(\omega-2\omega_m)+\delta(\omega+2\omega_m)\big),$$

il vient : $F\left[x(t).\cos^2\omega_m t\right] = \dfrac{1}{2\pi}X(\omega) * \left(\pi\delta(\omega)+\dfrac{\pi}{2}\big(\delta(\omega-2\omega_m)+\delta(\omega+2\omega_m)\big)\right)$, soit finalement :

$$F\left[x(t).\cos^2\omega_m t\right] = \frac{1}{2}X(\omega)+\frac{1}{4}X(\omega-2\omega_m)+\frac{1}{4}X(\omega+2\omega_m).$$

Ainsi, sous réserve que la pulsation de modulation soit supérieure à la pulsation maximale de X(ω), on peut éliminer les 2 répliques "haute fréquence" de X(ω) à l'aide d'un filtre passe-bas. On retrouve alors, au facteur ½ près, le spectre de départ X(ω).

Questions de cours :

1) Quel rôle exact joue le filtre anti-repliement dans le processus d'échantillonnage ?

Le filtre anti-repliement est destiné à limiter le support spectral du signal à échantillonner, afin d'empêcher les problèmes de repliement spectral. Le repliement spectral résulte de la périodisation

du spectre entraînée par l'échantillonnage. Lorsque le spectre est à support limité, les recouvrements spectraux peuvent être évités en fixant la fréquence d'échantillonnage à une valeur supérieure au double de la fréquence maximale.

2) Quelle différence y a-t-il entre le spectre d'un signal continu périodique, tel qu'une onde rectangulaire, et le spectre d'un signal apériodique comme un créneau de durée finie ?

Un signal périodique se décompose en une somme de signaux harmoniques, c'est-à-dire dont la fréquence est un multiple d'une fréquence fondamentale. Son spectre est constitué de raies distinctes, localisées aux fréquences des différents harmoniques. Le spectre d'un signal apériodique est continu. Le spectre d'un signal périodique obtenu par périodisation d'un signal apériodique correspond à la discrétisation du spectre du signal périodique.

3) Dans quel cas la densité spectrale d'un signal continu est-elle égale au carré du module de sa transformée de Fourier ?

C'est le cas des signaux à énergie finie (il s'agit alors d'une densité spectrale d'énergie).

4) Que vaut le temps de pic d'un système continu du 2ème ordre, d'amortissement 0,5 et de pulsation propre $\sqrt{3}.\pi$ *?*

Le temps de pic ou temps de premier dépassement est donné dans ce cas par : $\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}\pi\sqrt{1-0{,}25}} = \frac{2}{3} \approx 0{,}66\,\text{s}.$