CORRIGÉ de l'EXAMEN S.I.C. (Signal – Information – Communication)

Tous documents autorisés 23 mai 2007
Durée : 2 heures P. SIBILLE, M. TOMCZAK

Exercice 1 :

Déterminer l'original temporel de la transformée de Laplace suivante :

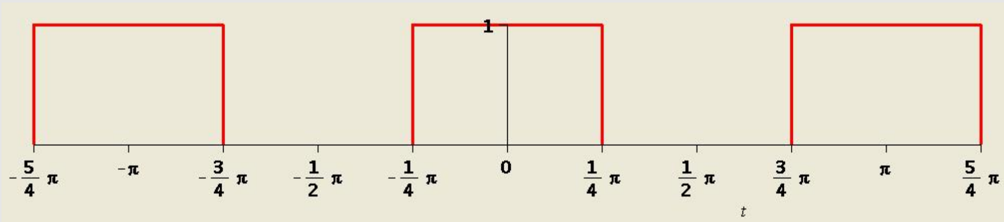
$$G(s)=\frac{2s+1}{s^2+2s+1}$$

$G(s)=\dfrac{2s+1}{(s+1)^2}=\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{(s+1)^2}=\dfrac{A}{s+1}-\dfrac{1}{(s+1)^2}$, d'où : $\dfrac{2s+1}{(s+1)^2}+\dfrac{1}{(s+1)^2}=\dfrac{A}{s+1}$, donc $A=2$.

Finalement : $\boxed{G(s)=\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{(s+1)^2}}$. On en déduit : $\boxed{g(t)=e^{-t}(2-t).1(t)}$.

Exercice 2 :

Soit le signal continu périodique $x_T(t)$ suivant :



Calculez les coefficients a_n et b_n de la décomposition en série de Fourier donnée par l'équation ci-après.

On intégrera entre $\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$.

$$x_T(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)+b_n\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Commentez les différents termes.

Le signal étant pair, les coefficients b_n sont nuls : $\boxed{b_n=0,\forall n\geq 1}$

La valeur moyenne du signal est donnée par : $a_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x_T(t)dt=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x_T(t)dt=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}dt=\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right]$

D'où finalement : $\boxed{a_0=\dfrac{1}{2}}$.

Enfin, on a : $a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x_T(t)\cos\left(2\pi\dfrac{n}{T}t\right)dt=\dfrac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(2nt)dt=\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{\sin(2nt)}{2n}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

D'où l'on tire : $a_n=\dfrac{1}{n\pi}\left[\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-n\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=\dfrac{1}{n\pi}\left[\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right]\boxed{=\dfrac{2\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)}{n\pi}=\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\mathrm{n}}{2}\right)}$.

On peut remarquer que $a_n = 0, n$ pair .

Posons $n = 2k+1, k = 0,1,2,\ldots$, on a alors : $\boxed{a_{2k+1} = (-1)^k \dfrac{2}{(2k+1)\pi}}$.

Finalement : $\boxed{x_T(t) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{2}{(2k+1)\pi} \cos\big(2(2k+1)t\big)}$.

Exercice 3 :

a. *Déterminez la fonction de transfert discrète :*

$$y(k) - \tfrac{1}{2}\, y(k-1) + \tfrac{1}{8}\, y(k-2) = u(k-5) - u(k-6)$$

b. *Quel est l'ordre de la fonction de transfert ?*

c. *Calculez les pôles et zéros de la fonction de transfert. Le système est-il stable ?*

d. *En supposant que les conditions initiales sont nulles, calculez y(k) pour **k=0 à 10** lorsque l'entrée est une impulsion.*

a. Par transformée en z, il vient : $Y(z)\left(1 - 0{,}5z^{-1} + 0{,}125z^{-2}\right) = U(z)\left(z^{-5} - z^{-6}\right)$ (R), d'où :

$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{z^{-5} - z^{-6}}{1 - 0{,}5z^{-1} + 0{,}125z^{-2}} = z^{-5}\,\frac{1 - z^{-1}}{1 - 0{,}5z^{-1} + 0{,}125z^{-2}}}.$$

b. La relation (R) précédente fait intervenir des termes du second ordre sur la sortie du système, celui-ci est donc du $\boxed{2^{\text{ème}}\text{ ordre}}$.

c. La transmittance s'écrit aussi : $G(z) = \dfrac{z-1}{z^6 - 0{,}5z^5 + 0{,}125z^4} \boxed{= \dfrac{z-1}{z^4(z^2 - 0{,}5z + 0{,}125)}}$

Elle admet donc un zéro en $\boxed{z = 1}$, un pôle quadruple en $\boxed{z = 0}$ et 2 pôles complexes conjugués en $\boxed{z = \dfrac{1}{4} \pm \dfrac{j}{4}}$. Ces derniers sont de module $\sqrt{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} < 1$, le système est donc $\boxed{\text{stable}}$.

d. La relation (R) précédente permet d'établir la relation de récurrence suivie par le système :

$$\boxed{y_k = \frac{1}{2} y_{k-1} - \frac{1}{8} y_{k-2} + u_{k-5} - u_{k-6}}$$

Si l'entrée du système est une impulsion, on a $\boxed{u_k = \delta_k = \begin{cases} 1 \text{ pour } k = 0 \\ 0 \text{ pour } k \neq 0 \end{cases}}$. Par ailleurs, le système présentant un retard pur de 5 périodes d'échantillonnage, il est clair que : $\boxed{y_k = 0, k = 0,1,2,3,4}$

Enfin, on a : $\boxed{y_5 = u_0 = 1}$; $\boxed{y_6 = \dfrac{1}{2} y_5 - u_0 = -\dfrac{1}{2}}$; $\boxed{y_7 = \dfrac{1}{2} y_6 - \dfrac{1}{8} y_5 = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} = -\dfrac{3}{8}}$

$\boxed{y_8 = \dfrac{1}{2} y_7 - \dfrac{1}{8} y_6 = -\dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{16} = -\dfrac{1}{8}}$; $\boxed{y_9 = \dfrac{1}{2} y_8 - \dfrac{1}{8} y_7 = -\dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{64} = -\dfrac{1}{64}}$;

$\boxed{y_{10} = \dfrac{1}{2} y_9 - \dfrac{1}{8} y_8 = -\dfrac{1}{128} + \dfrac{1}{64} = \dfrac{1}{128}}$

Exercice 4 :

Soit le système discret linéaire invariant dont la fonction de transfert est donnée par $G(z) = \dfrac{z^{-1} + 4z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}}$. *Calculer l'expression analytique de la réponse impulsionnelle du système.*

Les pôles étant complexes conjugués, on a :

$$G(z) = \frac{z+4}{z^2 - z + 0{,}5} = \frac{z+4}{(z-0{,}5)^2 + 0{,}25} \boxed{= 2\frac{0{,}5z}{(z-0{,}5)^2 + 0{,}25} + 8z^{-1}\frac{0{,}5z}{(z-0{,}5)^2 + 0{,}25}}$$

On a ici deux termes de la forme $\dfrac{z\beta}{(z-\alpha)^2+\beta^2}$ pour les quels on sait que l'original temporel est de la forme $\boxed{\rho^k \sin(k\theta)}$ avec $\alpha \pm j\beta = \rho.e^{\pm j\theta}$. Dans le cas présent, $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, d'où $\boxed{\rho = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ et $\boxed{\theta = arctg(1) = \dfrac{\pi}{4}}$.

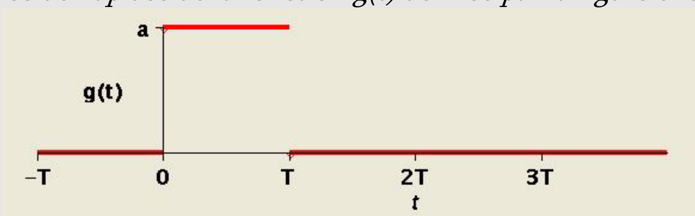
On en tire finalement : $\boxed{g_k = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \sin\left(k\dfrac{\pi}{4}\right).1(k) + 8\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{k-1} \sin\left((k-1)\dfrac{\pi}{4}\right).1(k-1)}$.

On pouvait aussi écrire : $\boxed{G(z) = z^{-1}\dfrac{z(z-0{,}5)}{(z-0{,}5)^2+0{,}25} + 9z^{-1}\dfrac{0{,}5z}{(z-0{,}5)^2+0{,}25}}$, d'où :

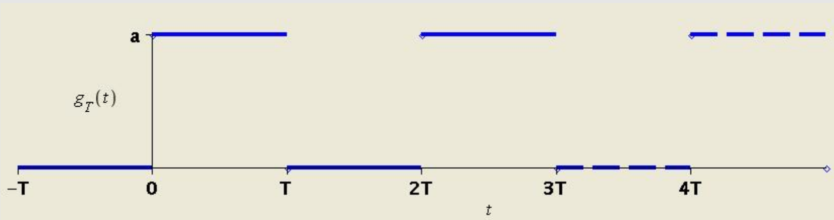
$$\boxed{g_k = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{k-1}\left(\cos\left((k-1)\frac{\pi}{4}\right) + 9\sin\left((k-1)\frac{\pi}{4}\right)\right).1(k-1)}$$

Exercice 5 :

Déterminer la transformée de Laplace de la fonction g(t) donnée par la figure ci-après.



En déduire la transformée de Laplace de la fonction $g_T(t)$.



On a $g(t) = a\big(1(t) - 1(t-T)\big)$, d'où : $\boxed{G(s) = \dfrac{a}{s}\left(1-e^{-sT}\right)}$.

$$g_T(t) = g(t) + g(t-2T) + g(t-4T) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} g(t-2nT) \text{, d'où :}$$

$$\boxed{G_T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} G(s)e^{-2nsT} = G(s)\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-2sT}\right)^n = G(s)\frac{1}{1-e^{-2sT}} = \frac{a\left(1-e^{-sT}\right)}{s\left(1-e^{-2sT}\right)} = \frac{a}{s\left(1+e^{-sT}\right)}}.$$

Exercice 6 :

Soit le système linéaire invariant dont la réponse impulsionnelle est $g(t) = \dfrac{K}{T}\exp\left(-\dfrac{t-\tau}{T}\right).1(t-\tau)$ *soumis à une entrée* $u(t) = 1(t) - 1(t-\tau)$, *K, T et* τ *étant des grandeurs strictement positives.*

a. Déterminer les transformées de Laplace de g(t) et u(t).
b. En déduire la transformée de Laplace de la sortie notée Y(s).
c. Calculez la réponse y(t) du système à cette entrée.

a. On a immédiatement : $\boxed{G(s) = \frac{K}{T} \frac{e^{-s\tau}}{s + \frac{1}{T}}}$ et $\boxed{U(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s\tau}\right)}$.

b. Bien sûr : $\boxed{Y(s) = G(s).U(s) = \frac{\frac{K}{T}}{s\left(s + \frac{1}{T}\right)}\left(e^{-s\tau} - e^{-2s\tau}\right)}$.

c. On a : $\boxed{\frac{\frac{K}{T}}{s\left(s + \frac{1}{T}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{T}} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s + \frac{1}{T}}}$, dont l'original temporel est : $K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).1(t)$. On en déduit : $\boxed{y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}\right).1(t - \tau) - K\left(1 - e^{-\frac{t-2\tau}{T}}\right).1(t - 2\tau)}$.

Exercice 7 :

Soit la séquence d'instructions Matlab suivante :

```
N=1024 ; fs=500 ; Ts=1/fs ; T=0.05 ;
x=sqrt(3)*sin(2*pi*(0:N-1)/(T*fs)+pi/4) ;
win=bartlett(N) ;
xw=win(:).*x(:);
Px=abs(fft(x)) ;
Pxw=abs(fft(xw));
w=2*pi*(0:N/2-1)*fs/N ; w=w(:);
plot(w,[Px(1:N/2) Pxw(1:N/2)]) ;
```

Expliquer globalement ce que réalise ce programme, puis commenter chaque instruction en explicitant le rôle et la nature des grandeurs manipulées, ainsi que, le cas échéant, les unités correspondantes.

Ce programme génère un signal sinusoïdal, effectue son analyse spectrale dans le cas d'un fenêtrage rectangulaire et dans le cas d'un fenêtrage triangulaire (fenêtre de Bartlett) puis représente les deux résultats sur une même figure.

`N=1024 ; fs=500 ; Ts=1/fs ; T=0.05 ;`

`N` est le nombre d'échantillons du signal, `fs` désigne la fréquence d'échantillonnage, `Ts` la période d'échantillonnage et `T` représente la période du signal sinusoïdal.

`x=sqrt(3)*sin(2*pi*(0:N-1)/(T*fs)+pi/4) ;`

Le signal est d'amplitude `sqrt(3)` et est déphasé de $\pi/4$.

`win=bartlett(N) ;`

Création d'une fenêtre de Bartlett de longueur `N`.

`xw=win(:).*x(:);`

`xw` représente le produit entre le signal et la fenêtre de Bartlett, le double point permet de forcer `x` et `xw` au format colonne.

`Px=abs(fft(x)) ;`
`Pxw=abs(fft(xw));`

Calcul du module des transformées de Fourier discrètes du signal de départ (donc fenêtré avec une fenêtre rectangulaire) et du signal fenêtré avec Bartlett.

`w=2*pi*(0:N/2-1)*fs/N ; w=w(:);`

Création d'un axe de fréquences, gradué ici en radians par seconde, c'est à dire que les spectres vont être représentés en fonction de la pulsation. Seules les fréquences positives sont conservées. Le vecteur `w` est ensuite forcé au format colonne.

`plot(w,[Px(1:N/2) Pxw(1:N/2)]) ;`

Tracé sur un même graphique des deux spectres en fonction de la pulsation.

Questions de cours :

1) Qu'illustre la variance d'un signal échantillonné et donnez en une estimation ?

La variance est une mesure de la dispersion des valeurs du signal autour de sa moyenne. Si cette dernière notée m est connue, la variance peut être estimée selon : $\boxed{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x(n)-m\right)^2}$ où N désigne le nombre d'échantillons du signal $x(n)$. Dans le cas où la moyenne doit être estimée, l'estimateur non-biaisé de la variance s'écrit : $\boxed{\frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x(n)-\hat{m}\right)^2}$.

2) A partir d'un signal aléatoire quelconque, montrez comment une variable centrée réduite peut être obtenue.

Le centrage du signal s'obtient par suppression de la moyenne : $\boxed{\overline{x} = x - m_x}$.
Le signal réduit s'obtient ensuite en le divisant par son propre écart-type : $\boxed{\overline{x}_r = \overline{x} / \sigma_x}$.

3) Comment doit-on procéder pour échantillonner un signal analogique continu ?

L'échantillonnage doit être effectué en respectant le théorème de Shannon, c'est-à-dire que la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure au double de la fréquence maximale du signal (en pratique, on choisit une valeur très supérieure). Les signaux physiques étant à support spectral non borné, il est nécessaire de procéder à un filtrage analogique passe-bas du signal avant échantillonnage afin de limiter sa largeur de bande et pouvoir ainsi parler de "fréquence maximale" du signal.

4) Que représentent les densités spectrales de puissance ou d'énergie d'un signal ?

Les densités spectrales de puissance ou d'énergie d'un signal représentent la répartition de l'énergie ou de la puissance du signal en fonction de la fréquence. On parle de densité spectrale d'énergie pour les signaux à énergie finie et de densité spectrale de puissance pour les signaux à puissance moyenne finie non-nulle.

5) Calculez la pulsation de coupure de la fonction de transfert suivante : $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+10s}$

Pour un système du 1er ordre, la pulsation de coupure à -3 dB est égale à l'inverse de la constante de temps. Dans le cas présent, la constante de temps est de 10 secondes, par conséquent, la pulsation de coupure est égale à 0,1 radian par seconde. Ceci se démontre de la façon suivante : par définition, la pulsation de coupure à -3 dB correspond à la pulsation pour laquelle le module de la réponse fréquentielle subit une atténuation de $\sqrt{2}$ (ce qui correspond à une atténuation en puissance d'un facteur 2) par rapport à sa valeur maximale. Or, le module de la réponse fréquentielle d'un 1er ordre est maximal en 0. La réponse fréquentielle s'obtient en posant $s = j\omega$ dans la fonction de transfert. On a donc :

$\boxed{\left|\frac{1}{1+10j\omega}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+100\omega^2}} = 1 \text{ en } \omega = 0}$ et $\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+100\omega_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$, d'où : $100\omega_c^2 = 1$ c'est-à-dire : $\boxed{\omega_c = \frac{1}{10}}$.