Méthodes de
Modèles et Outils pour
l'Automatisation des Systèmes
ESIAL 1A

Tony Bourdier alias GlanDyL
Version 1.4

Théorie des Graphes

Première méthode (Méthode de Malgrange)

Comment décomposer un graphe en un macro-graphe formé de n sous-ensemble de sommets

I Présentation du problème

Le graphe est présenté sous forme de tableau

	1	2	3	4
1			1	1
2		1		
3	1	1		
4				1

Dans cette fiche-méthode, on notera S l'ensemble des sommets. *S = {1,2,3,4} dans notre exemple.*
Les antécédents se lisent sur la colonne et les descendants sur la ligne.
Dans notre exemple : 2 et 3 sont antécédents de 2. 1 et 2 sont descendants de 3.

II Comment répondre à la question

Pour décomposer un graphe en un macro-graphe il faut :
- faire un tableau des antécédents et des descendants pour former des sous-ensembles
- reconstituer le graphe initial pour déterminer les arcs entre les différents sous-ensembles
- Ecrire le tableau du macro-graphe obtenu en prenant comme sommets les sous-ensembles trouvés

II.1 Le tableau des sous-ensembles (composantes fortement connexes)

Il s'agit en fait de trouver les sous-ensembles qui composeront le macro-graphe.
Chaque sous-ensemble est l'intersection de l'ensemble de tous les descendants et de tous les antécédents d'un sommet. Il s'agit en fait des composantes fortement connexes du graphe. Dans la pratique, on créé le tableau suivant :

Sommets	Antécédents	Descendants	Intersection

On prend le premier sommet et on rempli la case « antécédents » avec tous les antécédents du sommet mais aussi tous les antécédents de chacun de ces antécédents. Idem pour les descendants.
Nota Bene : il ne faut pas oublier dans l'intersection des antécédants et des descendants d'un sommet le sommet lui-même.

Sommets	Antécédents	Descendants	Intersection
1	3,1	3,4,1,2	1,3

Le premier sous-ensemble formé est $A_1 = \{1,3\}$. On peut donc rayer 1 et 3 dans le tableau initial.

	1	2	3	4
1			1	1
2		1		
3	1	1		
4				1

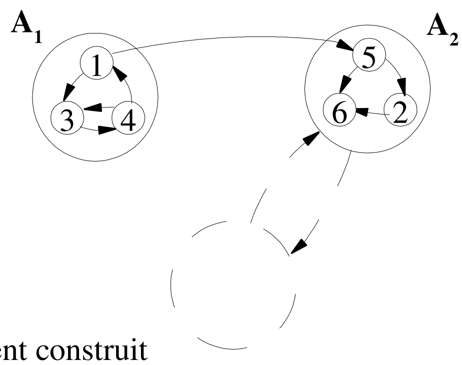
Le prochain sommet est donc 2. On remplit ainsi la ligne suivante :

Sommets	Antécédents	Descendants	Intersection
1	3,1	3,4,1,2	1,3
2	...	...	...

On trouve ainsi un ensemble de sous-ensemble de sommets : $\{A_1, A_2, ...\}$

II.2 Les arcs entre les différents sous-ensembles

On a donc nos sous-ensembles de sommets : $\{A_1, A_2, ...\}$,
Dans notre exemple $A_1 = \{1,3\}$ *...*
Il faut maintenant relier les A_i entre eux. Pour cela, il faut regarder le graphe initial et relier à A_i tous les A_j tels qu'il existe un sommet de A_i allant vers un sommet A_j.



II.3 Tableau du macro graphe

Il suffit tout simplement de reprendre le graphe précédemment construit pour établir le tableau avec les nouveaux sous-ensembles.

	A_1	A_2	A_3
A_1		1	
A_2			1
A_3		1	

Il faut également préciser si chacun de ces sous-ensembles possèdes les propriétés suivantes :

- fortement connexe
- symétrie (ou anti)
- avec ou sans boucle
- complétude
- périodicité (ou non)

Réseaux de Petri

Seconde méthode
Comment montrer qu'une séquence est franchissable et trouver le marquage minimal

I Présentation du problème

On considère un réseau de Petri <P,T, Pre, Post>, un marquage initial M_0 et une séquence s. On veut savoir si cette séquence est franchissable à partir de M_0. En faisant les calculs, on trouve même le marquage minimal pour que cette séquence soit franchissable.

II Résolution algorithmique du problème

NDLR : La question est résolvable algorithmiquement, cela signifie que le dernier des imbéciles doit pouvoir répondre à la question en suivant très exactement les instructions. Vous voilà rassuré :)

Rappel : s est une séquence, $\underline{s}$ est le vecteur correspondant à cette séquence. Lorsque l'on note s = s'.t , t est la dernière transition de la séquence s et s' la séquence qui se trouve avant la transition t. On note λ la transition vide.

On définit récursivement les vecteurs $\underline{\text{Pre}}$ et $\underline{C}$: (en posant s = s'.t)

$$\underline{\text{Pre}}(\bullet,s) = \max(\underline{\text{Pre}}(\bullet,s') ; \text{Pre}(\bullet,t) - \underline{C}(\bullet,s'))$$

$$\underline{C}(\bullet,s) = \underline{C}(\bullet,s') + C(\bullet,t)$$

Initialisation

$$\underline{\text{Pre}}(\bullet,\lambda) = (0,...,0)$$

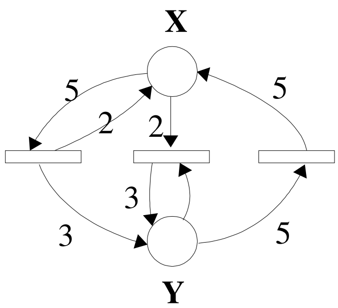
$$\underline{C}(\bullet,\lambda) = (0,...,0)$$

La solution du problème posé étant donnée par la propriété suivante :

$$\mathbf{\underline{Pre}(\bullet,s) \leq M_0 \quad \Leftrightarrow \quad M_0(s >}$$

III Exemple de résolution « pas à pas »

Soit le RdP suivant :



On note a, b et c les transitions.
On considère une séquence s = bbca.
Pour ce problème, on a besoin des matrices Pre et C.

$$\text{Pre} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \end{array}$$

$$\text{Pre} = \begin{array}{|ccc|c} \multicolumn{1}{c}{a} & b & \multicolumn{1}{c}{c} & \\ 5 & 2 & 0 & X \\ 0 & 1 & 5 & Y \end{array} \qquad C = \begin{array}{|ccc|c} \multicolumn{1}{c}{a} & b & \multicolumn{1}{c}{c} & \\ -3 & -2 & 5 & X \\ 3 & 2 & -5 & Y \end{array}$$

On procède transition par transition :

$$s = \lambda \quad \left| \quad \underline{Pre}(\bullet,s) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \underline{C}(\bullet,s) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right.$$

La première transition de la séquence est b. On a donc besoin de Pre (•,b) qui est la colonne b de la matrice Pre :

$$\text{Pre} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{l} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ X \\ Y \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{Pre}(\bullet,b) = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Pre}(\bullet,a) = \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Pre}(\bullet,c) = \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \end{vmatrix}$$

(les vecteurs grisés sont ceux qui ont été trouvés par le calcul précédent)

$$s = b \quad \left| \quad \underline{Pre}(\bullet,s) = \max\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \underline{C}(\bullet,s) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \end{vmatrix} \right.$$

La seconde transition est encore b :

$$s = bb \quad \left| \quad \underline{Pre}(\bullet,s) = \max\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \underline{C}(\bullet,s) = \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 \\ 4 \end{vmatrix} \right.$$

La transition suivante est c :

$$s = bbc \quad \left| \quad \underline{Pre}(\bullet,s) = \max\left(\begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 \\ 4 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \underline{C}(\bullet,s) = \begin{vmatrix} -4 \\ 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 \\ -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \right.$$

Et enfin, la transition a :

$$s = bbca \quad \left| \quad \underline{Pre}(\bullet,s) = \max\left(\begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \underline{C}(\bullet,s) = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \end{vmatrix} \right.$$

$\Rightarrow$ donc le marquage minimal est $\quad M_{min} = \underline{Pre}(\bullet,s) = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix}$

Conclusion : Comme M(s> $\Leftrightarrow$ $M \geq M_{min}$ (ce qui est équivalent de dire : la séquence s est franchissable à partir de tout marquage $M \geq M_{min}$), on regarde M_o et s'il est supérieur à M_{min}, alors la transition est franchissable.

Troisième méthode

Comment trouver les invariants

(composantes conservatives et répétitives)

I Présentation du problème

On considère un réseau de Petri < P,T, Pre, Post > et l'on veut trouver les invariants.
Rappel : les invariants de marquage (= composantes conservatives) sont les P-semi-Flots.
Les invariants de franchissement (= composantes répétitives) sont les T-semi-Flots.

II Recherche des P-semi-Flots

Par définition, F est un P-semi-Flot si $F^T.C = 0$ ou encore :
B est une composante conservative ssi il exite un vecteur pondération $F = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $B = P(F)$ et $\sum q_i.M(P_i) = \text{constante}$. *B ($\subset$ P) est un ensemble des places = $\{P_1, \dots, P_n\}$, F est un ensemble de coefficients entiers et $M(P_i)$ est le nombre de jetons qu'il y a dans la place P_i.*

Dans la pratique, on considère la matrice C et une matrice identité A de dimension card(P) :

$$
\begin{array}{cccc|ccc|l}
 & A & & & & C & & \\
1 & & & & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \leftarrow P_1 \\
 & 1 & & & c_{21} & c_{22} & c_{23} & \leftarrow P_2 \\
 & & 1 & & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \leftarrow P_3 \\
 & & & 1 & c_{41} & c_{42} & c_{43} & \leftarrow P_4 \\
\hline
q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

On cherche toutes les combinaison linéaire indépendantes des lignes pour obtenir 0

III Recherche des T-semi-Flots

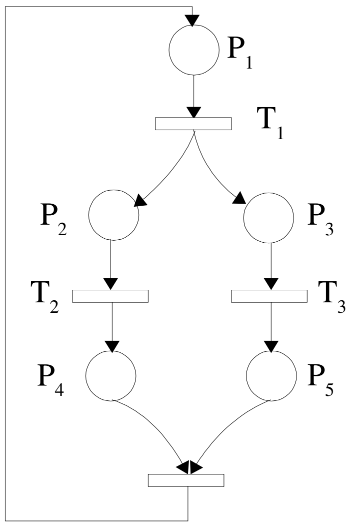
Par définition, S est un T-semi-Flot si C.S = 0.
Dans la pratique, on considère la transposée de la matrice C et une matrice identité A de dimension card(T).

$$
\begin{array}{ccc|cccc|l}
 & A & & & C^T & & & \\
1 & & & c_{11} & c_{21} & c_{31} & c_{41} & \leftarrow T_1 \\
 & 1 & & c_{12} & c_{22} & c_{32} & c_{42} & \leftarrow T_2 \\
 & & 1 & c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} & \leftarrow T_3 \\
\hline
q_1 & q_2 & q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

On cherche toutes les combinaisons linéaires indépendantes des lignes pour obtenir 0

III Exemple de résolution « pas à pas »

III.1 **Trouver les P-semi-Flots** du RdP suivant :



Tout d'abord, on cacule la matrice d'incidence C.

$$C = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

On dresse un trableau associant la matrice identité d'ordre card(P) et la matrice d'incidence C précédemment calculée. A partir de cela, on cherche à faire des combinaisons linéaires de telle sorte que la combinaison des lignes donne 0.

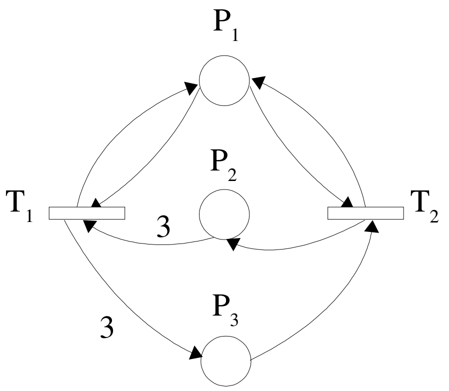
A					C				
1					-1	0	0	1	P_1
	1				1	-1	0	0	P_2
		1			1	1	-1	0	P_3
			1		0	1	0	-1	P_4
				1	0	0	1	-1	P_5

1	1				0	-1	0	1	$P_1 + P_2$
1	1		1		0	0	0	0	$P_1 + P_2 + P_4$
1		1		1	0	0	0	0	$P_1 + P_3 + P_5$
2	1	1	1	1	0	0	0	0	$2P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$ *(combinaison des deux lignes précédentes)*

$F_1 = (1,1,0,1,0)$ et $F_2 = (1,0,1,0,1)$ sont deux P-semi-Flots.

(les composantes conservatives corresponsantes sont respectivement {P_1, P_2 et P_4} et {P_1, P_3 et P_5})

III.2 **Trouver les T-semi-Flots** du RdP suivant :



$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

On procède exactement de la même manière que précédemment, mais avec C^T.

A		C^T			
1		0	-3	3	T_1
	1	0	1	-1	T_2

1	3	0	0	0	$T_1 + 3T_2$

<u>S</u> = (1,3) est un T-semi-Flot *(la composante répétitive corresponsante est {T_1, T_2})*

Quatrième méthode

Comment calculer les fréquences de franchissement

I Présentation du problème

On considère un réseau de Petri temporisé < P,T, Pre, Post > dont chaque place P_i est affectée de la durée d_i et un marquage initial M_0. On cherche à calculer les fréquences de franchissement des transitions à vitesse maximale et le temps de cycle minimum.

II Comment répondre à la question

Le calcul des fréquences de franchissement se fait en 4 étapes :

- On calcule les matrices Post et C du réseau de Petri
- On calcule les P-semi-flots que l'on nomme X_1, X_2, ... *(cf méthode 3)*
- Pour chaque P-semi-flots X_i , on écrit l'inégalité : $X_i^T.D.Post.F \leq X_i^T.M_0$

$$\text{où } D = \begin{vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & d_n \end{vmatrix} \quad \text{et F est le vecteur des fréquences de franchissements} \quad \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_q \end{vmatrix}$$

- On obtient n inégalités. La vitesse maximale correspond au cas d'égalité. On résoud le système.
- On calcule un T-semi-flot S, ce qui nous donne une relation entre les f_i

ex : $\underline{S} = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ nous permet d'écrire que $3.f_1 = f_2$
(car t_2 apparaît 3 fois plus que t_1 dans S)

- On transforme chaque inégalité en égalité :

ex : $d_1 f_1 + d_1 f_2 = 1$ (a)
$3 d_3 f_1 + d_2 f_2 = 3$ (b)

- On remplace les d_i par leur valeur (donnés dans l'énoncé)
- On injecte l'égalité de S dans chacune des égalité trouvées grâves aux P-semi-flots et on cherche à calculer les f_i

ex : pour $d_1 = d_2 = d_3 = 1$

$f_1 + f_2 = 1$ (a)
$3 f_1 + f_2 = 3$ (b)
avec $3 f_1 = f_2$
$4 f_1 = 1$ (a) => $f_1 = ¼$
$6 f_1 = 2$ (a) => $f_1 = ½$

- Chacune des égalités nous fournit un résultat. On aura donc p résultat différents.
(où p est le nombre de P-semi-flots)
- Il faut prendre le résultat minimum

ex : dans notre exemple, on a donc $f_1 = ¼$ et donc $f_2 = ¾$

- Le temps minimum de cycle est le dénominateur commum aux fréquences de franchissement ou encore $d = f_i / s_i$ où s_i est le ième élement de S.

ex : dans notre exemple, on a donc d = 4

Cinquième méthode

Comment tracer le graphe des marquages accessibles

I Présentation du problème

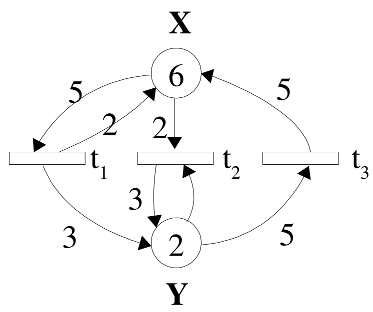
Il y a deux cas possibles :

• Tracer le graphe des marquages accessibles

• Tracer le graphe des marquages accessibles en utilisant la grammaire associée

II Résolution du premier cas

On part du marquage initial M_0 et on construit un arbre dont chaque sommet est le marquage obtenu par franchissement de la transition qui est sur la branche à partir du marquage parent. Il s'agit d'explorer tous les cas possible d'évolution du marquage en regardant pour chaque marquage quelles sont les transitions franchissables. Pour chacune des ses transitions, on créé une nouvelle branche.



Ici, $M_0 = (6,2)$, on peut franchir t_1 ou t_2, ce qui donne :

$M_0 = (6,2)$

/ \

t_2 t_1

/ \

$M_1 = (3,3)$ $M_2 = (2,4)$

| |

t_2 t_2

| |

$M_3 = (1,5)$ $M_4 = (0,6)$

| |

t_3 t_3

| |

$M_5 = (6,0)$ *revient sur* M_0

|

t_1

|

revient sur M_1

III Résolution du second cas

C'est exactement la même chose que précédemment sauf que l'on adopte une nouvelle notation :

$M_0 = (6,2) = X^6Y^2$ *(puisque l'on a nommé la première place X et la seconde Y)*

Ce qui donne : X^6Y^2

t_2 / \ t_1

X^3Y^3 X^2Y^4

t_2 | | t_2

XY^5 Y^6 *etc ...*