Examen final - Mathématiques numériques

ESIAL 1

Mai 2006

B. Pinçon

Documents et calculatrices interdits sauf page A4 manuscrite personnelle.

Durée : 2 H ;

1. Arithmétique flottante (3 pts)

On cherche à calculer la fonction :

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1$$

pour un nombre flottant x petit ($|x| \leq 1$).

(a) Quel problème rencontre-t-on avec l'algorithme direct :

$$y1 := \text{sqr}(1 \oplus x) \ominus 1$$

où sqr désigne la racine carrée calculée par la machine (ne pas faire d'analyse d'erreur)?

(b) Écrire f différemment pour éviter ce problème? (aide : faire "apparaître" $\sqrt{1+x} + 1$).

2. Interpolation (4 points)

(a) (1 pt) Écrire sous la forme de Lagrange, le polynôme d'interpolation des points $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (2, 1)$ et $P_4 = (3, 0)$ (*Rmq* : ne pas revenir à la base canonique).

(b) (2 pts) Même question en écrivant le polynôme dans la base de Newton adéquate (de même que précédemment ne pas revenir dans la base canonique). Écrire lisiblement le tableau des différences divisées.

(c) (1 pt) Calculer le polynôme d'interpolation des points : $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (1, 2)$, $P_3 = (2, 3)$ et $P_4 = (3, 4)$ (réfléchir au moins 1 mn avant de partir dans la "méthode" de votre choix!).

3. Système linéaire (4 pts)

(a) Effectuer une décomposition LU (sans échange d'équations) sur la matrice A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Utiliser cette décomposition pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, où $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}$.

4. Moindres carrés (5 points)

On cherche à approcher des données expérimentales (x_i, y_i) , $i = 1 \dots m$, $m \geq 2$, par une fonction affine $f(x) = ax + b$. Pour cela on résout le problème suivant :

$$\min_{a,b} \sum_{i=1 \dots m} (y_i - ax_i - b)^2. \quad (1)$$

Les x_i sont supposés distincts.

- (a) (1,5 pts) Montrer que le problème (1) peut se mettre sous la forme standard :

$$\min_{v \in \mathbb{R}^2} \|Av - w\|^2,$$

où vous explicitez la matrice A ainsi que les vecteurs v et w .

- (b) (1 pt) Le problème (1) admet-il une solution unique ?

- (c) (2,5 pts) En passant par les équations normales, montrez que le problème (1) admet pour solution

$$a = \frac{mS_{xy} - S_x S_y}{mS_{xx} - S_x^2}, \quad b = \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{mS_{xx} - S_x^2},$$

où

$$S_x = \sum_{i=1}^m x_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^m y_i, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^m x_i^2, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^m x_i y_i.$$

5. Classification et inertie (4 pts)

- (a) *Théorème de Huygens*. Soient n vecteurs de $\mathbb{R}^p$ notés x_i , $i = 1, \dots, n$. On désigne par g le barycentre de ces points et on note $I(y) = \sum_{i=1}^n \|x_i - y\|^2$ l'inertie de ces points par rapport à un point $y \in \mathbb{R}^p$ donné. Montrer que :

$$I(y) = I(g) + n\|y - g\|^2, \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^p.$$

Aide : comme dans le TD Moindres carrés, développer le produit scalaire :

$$((x_i - g) - (y - g)) \cdot ((x_i - g) - (y - g)) = \|(x_i - g) - (y - g)\|^2 = \|x_i - y\|^2$$

et utiliser la définition du barycentre $g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

- (b) A l'aide de la question précédente, expliquer pourquoi l'inertie totale diminue dans la phase de barycentrage de l'algorithme H-means (rmq : soyez précis, fixez vous des notations de manière à ce que vos explications soient bien claires).