ESIAL 1 — Module Mathématiques appliquées discrètes

Algèbre de Boole : composition, parties génératrices.

Exercice 1

On considère l'ensemble $\mathbb{B}$ muni des deux lois $\oplus$ et $\times$.

1. Vous avez déjà rencontré cette structure algébrique ailleurs mais avec des notations différentes. Lesquelles ?
2. Montrer qu'il existe une application naturelle de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X_1,\ X_2, \ldots, X_n]$ dans $\mathbb{F}_n$. Cette application est-elle bijective ?
3. (a) Définir un sous-ensemble de $P_1[X_1,\ X_2, \ldots, X_n]$ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X_1,\ X_2, \ldots, X_n]$ de façon que l'application précédente restreinte à $P_1[X_1,\ X_2, \ldots, X_n]$ soit une bijection.
   (b) Enoncer le résultat obtenu.

Exercice 2

Soient les 5 propriétés suivantes définies sur $\mathbb{F}$:

$$\begin{cases} P_1(f) \Leftrightarrow f(0, \ldots, 0) = 0 \\ P_2(f) \Leftrightarrow f(1, \ldots, 1) = 1 \\ P_3(f) \Leftrightarrow f = f^* \quad (f\ autoduale) \\ P_4(f) \Leftrightarrow f\ croissante \\ P_5(f) \Leftrightarrow f \in comp(\{0,\ 1,\ \oplus\}) \end{cases}$$

On rappelle le théorème énoncé en cours :

$$comp(E) = \mathbb{F} \Leftrightarrow (\forall k \in \{1,2,3,4,5\})\ (\exists f \in E)\ \neg P_k(f)$$

1. Remplir le tableau en cochant les propriétés $\neg P_i$ pour chacune des fonctions proposées.

	0	1	$\overline{x}$	$+$	$\times$	*nor*	*nand*	$\Rightarrow$	$\not\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\not\Leftrightarrow$
$\neg P_1$											
$\neg P_2$											
$\neg P_3$											
$\neg P_4$											
$\neg P_5$											

2. En utilisant les renseignements du tableau ci-dessus et le théorème rappelé, trouver toutes les parties de $\mathbb{F}_2$ qui forment des parties génératrices minimales.

Exercice 3

On considère l'ensemble A des fonctions booléennes vérifiant la propriété P_1 de l'exercice précédent.

1. Montrer que $comp(A) = A$.
2. Calculer $A \cap \mathbb{F}_2$, l'ensemble des fonctions de A à deux variables.
3. Montrer que $comp(\{+, \times, |\}) = A$, où $x|y\ =\ x \not\Rightarrow y\ =\ x\overline{y}$. $x|y$ se lit "x sauf y" et est utilisé en informatique documentaire.

4. En informatique documentaire, dans la recherche de documents pertinents par fonctions booléennes, on ne donne pas la fonction boolénne “négation”aux utilisateurs du langage d'interrogation. En revanche, ils ont le droit au “ou”, au “et” et au “sauf”. Donner une raison physique à cette limitation.

Exercice 4

Soient les deux fonctions booléennes $f_1(x, y, z) = xy + yz + xz$ et $f_2(x) = \overline{x}$.

1. Montrer que $\{f_1, f_2\}$ n'est pas une partie génératrice.
2. Trouver l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{F}_2$ tels que $\{f_1, f_2, f\}$ soit une partie génératrice en précisant quand $\{f_1, f_2, f\}$ est minimale.