ESIAL 1 — Module Mathématiques appliquées discrètes

Raisonnement par récurrence et par induction.

Exercice 1 : Démontrer par récurrence les deux propriétés suivantes :

$$(\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ 1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$$

Exercice 2 : On considère un quadrillage de côté 2^n. Montrer qu'en supprimant une quelconque des cases de ce quadrillage, la partie restante peut être recouverte par des triminos de la forme suivante :

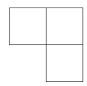

FIG. 1 – Forme des triminos

Démontrer ce résultat par récurrence sur n. Montrer l'algorithme sous-jacent permettant de résoudre ce puzzle pour $n = 3$.

Exercice 3 :

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ (n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4$.
2. Déduire du résultat précédent que tout entier $m \in \mathbb{N}$ peut s'écrire comme somme et différence de carrés $1^2,\ 2^2,\ 3^2, \ldots, n^2$ pour un certain entier n, c'est-à-dire

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(\exists \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\})\ m = \epsilon_1 1^2 + \epsilon_2 2^2 + \ldots + \epsilon_n n^2$$

   Indications : On considérera une récurrence à 4 crans et on on montrera le résultat pour $m = 0$ (avec $n = 7$), $m = 1$ (avec $n = 1$), $m = 2$ (avec $n = 4$) et $m = 3$ (avec $n = 2$).

Exercice 4 : On considère l'ensemble AB des arbres binaires définis inductivement (voir définition donnée en cours), ainsi que les fonctions n et h calculant respectivement le nombre d'éléments et la hauteur d'un arbre binaire. Montrer que $(\forall a \in AB)\ h(a) \leq n(a)$.

Exercice 5 : On dit qu'un arbre binaire est strict s'il est non vide et s'il n'a pas de nœud avec un seul fils non vide.

1. Définir par induction l'ensemble ABS des arbres binaires stricts.
2. Définir la fonction n calculant le nombre l'ensemble ABS des arbres binaires stricts.
3. Définir la fonction n calculant le nombre d'éléments (i.e. nœuds) d'un arbre binaire strict.
4. Définir la fonctios d'éléments (i.e. nœuds) d'un arbre binaire strict.
5. Définir la fonction f calculant le nombre de feuilles d'un arbre binaire strict.
6. Montrer que $(\forall a \in ABS)\ n(a) = 2 * f(a) - 1$.

Exercice 6 On considère l'ensemble *Liste* des listes d'éléments de $\mathbb{N}$ défini inductivement par

- la base $B = \{nil\}$ (nil est appelé la liste vide).
- l'ensemble des opérations comporte la seule opération ::

$$\begin{array}{rrcl} :: : & \mathbb{N} \times Liste & \rightarrow & Liste \\ & (e,\ l) & \mapsto & e :: l \end{array}$$

1. Définir la fonction $somme\ :\ Liste \rightarrow \mathbb{N}$ calculant la somme des éléménts d'une liste d'entiers.
2. Définir la fonction $longueur\ :\ Liste \rightarrow \mathbb{N}$, calculant la longueur d'une liste.
3. Définir la fonction $maximum\ :\ Liste \rightarrow \mathbb{N}$ calculant le plus grand élément d'une liste. En général on ne définit pas le maximum de nil, la liste vide, quelle valeur doit lui donner si l'on veut le faire ? justifier votre réponse. Indication : utiliser la fonction $max(a,\ b)$ calculant le maximum de deux nombres entiers.
4. Démontrer la propriété suivante :

$$(\forall l \in Liste)\ somme(l) \leq longueur(l) * maximum(l)$$

Exercice 7 : Un arbre binaire est *équilibré* si pour chaque nœud de l'arbre la différence des sous-arbres gauche et droit est au plus 1. Par exemple, la figure 2 montre des arbres équilibrés de hauteur 3, 4 et 5 (les étiquettes des nœuds ne sont pas représentées).

1. Définir inductivement l'ensemble AVL des arbres équilibrés.
2. On définit la suite entière u par :

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_1 & = 1 \\ u_n & = u_{n-1} + u_{n-2} + 1 \quad si\ n \geq 2 \end{cases}$$

   Montrer que $(\forall a \in AVL)\ n(a) \geq u_{h(a)}$, où n et h sont respectivement les fonctions donnant le nombre de nœuds et la hauteur d'un arbre.

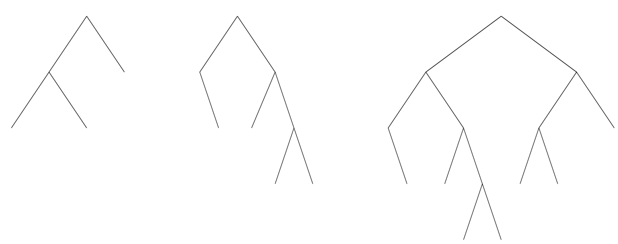

Fig. 2 – Exemples d'arbres équilibrés