ESIAL 2006-2007: correction examen de Probabilités

Exercice 1 Soit (Ω, P) un espace de probabilité et soient A, B et C trois événements indépendants. Exprimer la quantité

$$P\Big([(A \cap B) \cup C]^c \Big)$$

en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$. On rappelle que le complémentaire d'un événement A s'écrit $\bar{A}$ ou A^c. On prendra soin de justifier chaque opération effectuée.

Réponse : On utilise tout d'abord la relation $P(D^c) = 1 - P(D)$, donc :

$$P\Big([(A \cap B) \cup C]^c \Big) = 1 - P((A \cap B) \cup C)$$

Comme $P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E)$, il vient :

$$P((A \cap B) \cup C) = P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap B) \cap C)$$

A, B et C étant des évènements mutuellement indépendants :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),\ P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned} P\Big([(A \cap B) \cup C]^c \Big) &= 1 - (P(A)P(B) + P(C) - P(A)P(B)P(C)) \\ &= = (1 - P(A)P(B))(1 - P(C)) \end{aligned}$$

Exercice 2 Dupond et Dupont tiennent chacun un stand de pommes ce matin au marché de Vandœuvre. Le lot de pommes de Dupond contient 5% de pommes trop mûres, alors que celui de Dupont en contient 20%. Le petit Stan a été envoyé par sa maman pour acheter des fruits, mais ne sachant plus reconnaître Dupond de Dupont, il pioche une pomme au hasard dans un des deux lots. Cette pomme est trop mûre.

2.1 Modéliser cette expérience à l'aide d'un espace de probabilité (Ω, P).

Réponse : Il est clair dans l'expérience que chaque pomme possède 2 propriétés "binaires" :

(i) *elle vient soit du stand de Dupond (évènement que l'on notera D) soit du stand de Dupont (évènement que l'on notera $T = \bar{D}$)*

(ii) *elle trop mûre (TM) ou pas ($PTM = \bar{TM}$)*

Ainsi :

$$\Omega = \{(s, e) : s \in \{D, T\}, e \in \{TM, PTM\}\}$$

D'autre part le fait que le petit Stan pioche au hasard dans l'un des 2 lots se traduit par le fait que $P(D) = P(T) = 0.5$.

2.2 Quelle est la probabilité que la pomme piochée provienne du lot de Dupont?

Réponse : Il s'agit donc de calculer $P(T|TM)$:

$$P(T|TM) = \frac{P(T \cap TM)}{P(TM)} = \frac{P(TM|T)P(T)}{P(TM)}$$

Mais $P(TM) = P(TM|T)P(T) + P(TM|D)P(D)$, soit :

$$P(T|TM) = \frac{P(TM|T)P(T)}{P(TM|T)P(T) + P(TM|D)P(D)}$$

A.N. :

$$P(T|TM) = \frac{(20/100) \times (1/2)}{(20/100) \times (1/2) + (5/100) \times (1/2)} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

Exercice 3 Gudule est représentant des éditions Labrune, chargé de vendre l'Encyclopédie en 37 tomes de la maison. On essaiera dans cet exercice de donner des informations sur ses ventes journalières.

3.1 Gudule se prépare à effectuer ses démarches dans un petit immeuble de la rue Clovis. On modélise le nombre d'habitants de cet immeuble se trouvant à leur domicile par une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$.

1. Préciser l'ensemble $\mathbb{X}$ des valeurs prises par X, puis calculer son espérance et sa variance.

   Réponse :

   (i) $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$.

   (ii) $E(X) = 1 \times (1/4) + 2 \times (1/4) + 3 \times (1/4) + 4 \times (1/4) = 10/4 = 5/2 = 2.5$ *(on pouvait utiliser, en la citant, la formule vue en exercice $E(X) = (n+1)/2$).*

   (iii) $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$. $E(X^2) = 1 \times (1/4) + 2^2 \times (1/4) + 3^2 \times (1/4) + 4^2 \times (1/4) = (1 + 4 + 9 + 16)/4 = 30/4$. *Donc* $Var(X) = 30/4 - (5/2)^2 = 5/4$ *(on pouvait utiliser la formule vue en exercice $Var(X) = (n^2 - 1)/12 = 15/12 = 5/4$).*

2. On suppose que si $X = i$, alors le nombre de ventes de Gudule suit une loi binomiale $\mathcal{B}(i, p)$, avec $p = 0.02$. Calculer la probabilité que le nombre de ventes soit égal à 2.

Réponse : Appelons V_{clovis} la variable aléatoire du nombre de ventes dans cet immeuble. Cette variable aléatoire "dépend" de la variable aléatoire X (la loi du nombre de vente est connue si on connait le nombre d'habitants présents); on faut donc scinder le résultat en fonction des valeurs possibles pour X :

$$P(V_{clovis} = 2) = \sum_{i=1}^{4} P(V_{clovis} = 2|X = i)P(X = i)$$

On sait que si $X = i$ alors la vente suit $\mathcal{B}(i,p)$. Donc $P(V_{clovis} = 2|X = i) = C_i^2 p^2(1-p)^{i-2}$ si $i \geq 2$ (dans le cas où $X = 1$ il est évident que l'on ne pourra pas vendre 2 encyclopédies). Finalement :

$$\begin{aligned}
P(V_{clovis} = 2) &= \sum_{i=2}^{4} \frac{i!}{2!(i-2)!} p^2 (1-p)^{i-2} \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{8} p^2 \sum_{i=2}^{4} i(i-1)(1-p)^{i-2} \\
&= \frac{1}{8} p^2 \left(2 + 6(1-p) + 12(1-p)^2\right) \\
&= \frac{1}{4} p^2 (10 - 15p + 6p^2) \\
&\simeq 0.00097
\end{aligned}$$

3.2 Gudule décide à présent d'attaquer la grosse résidence Triton. On modélise le nombre d'habitants de cet immeuble se trouvant à leur domicile par une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda = 50$.

1. Préciser l'ensemble $\mathbb{Y}$ des valeurs prises par Y, puis calculer son espérance en justifiant votre réponse.

   Réponse : $\mathbb{Y} = \mathbb{N}$. On a (question déjà traitée en TD) :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

   On pose $k' = k - 1$, il vient :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda \\
&= 50
\end{aligned}$$

2. On suppose toujours que si $Y = i$, alors le nombre de ventes de Gudule suit une loi binomiale $\mathcal{B}(i, p)$, avec $p = 0.02$. Soit Z le nombre de ventes d'Encyclopédies sur l'immeuble. Montrer que Z suit une loi de Poisson de paramètre λp.

Réponse : même démarche que précédemment (et identique à l'exercice 9 feuille 3). On note V_{triton} le nombre de ventes dans cette résidence :

$$\begin{aligned}
P(V_{triton} = k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(V_{triton} = k | Y = i) P(Y = i) \\
&= \sum_{i=k}^{+\infty} P(V_{triton} = k | Y = i) P(Y = i) \\
&= \sum_{i=k}^{+\infty} C_i^k p^k (1-p)^{i-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= p^k e^{-\lambda} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{i!}{k!(i-k)!} (1-p)^{i-k} \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= \frac{p^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{(i-k)!} (1-p)^{i-k} \lambda^{i-k+k} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{(i-k)!} (1-p)^{i-k} \lambda^{i-k} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{i-k}}{(i-k)!}
\end{aligned}$$

On pose $j = i - k$, il vient :

$$\begin{aligned}
P(V_{triton} = k) &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

On obtient donc $V_{triton} \sim \mathcal{P}(\lambda p)$, soit donc bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda p =$ $50 \times 0.02 = 1$

3.3 Aujourd'hui, notre représentant se trouve à la cité du Val Fleuri, composée de $n = 50$ immeubles. Dans chaque immeuble, le nombre d'Encyclopédies vendues suit une loi de Poisson de paramètre 0.5. Les ventes sont supposées indépendantes d'un immeuble à l'autre. Soit V le nombre total d'Encyclopédies vendues dans la journée. Donner une valeur approchée de $P(V \geq 28)$.

Réponse : soit V_k le nombre d'encyclopédies vendues dans l'immeuble k, il est clair que $V = \sum_{k=1}^{50} V_k$. Les V_k étant des v.a.i.i.d. (de loi de Poisson de paramètre 0.5 et donc telles que $E(V_k) = 0.5$ et $\sigma(V_k) = \sqrt{0.5}$ pour tout k), on va pouvoir utiliser le TCL pour obtenir l'approximation cherchée :

$$\begin{aligned}
P(V \geq 28) &= P\left(\sum_{k=1}^{50} V_k \geq 28\right) \\
&= P\left(\sum_{k=1}^{50} (V_k - E(V_k)) \geq 28 - 50E(V_k)\right) \\
&= P\left(\sum_{k=1}^{50} (V_k - E(V_k)) \geq 3\right) \\
&= P\left(\frac{1}{\sqrt{50}} \sum_{k=1}^{50} \frac{V_k - E(V_k)}{\sigma(V_k)} \geq \frac{3}{\sqrt{50 \times 0.5}}\right) \\
P(V \geq 28) &= P\left(Z_{50} \geq \frac{3}{5} = 0.6\right)
\end{aligned}$$

D'après le théorème central limite la variable aléatoire Z_{50} suit approximativement la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Donc $P(V \geq 28) \simeq 1 - F(0.6)$ (où F désigne la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$). La table donne : $P(V \geq 28) \simeq 1 - 0.7257 = 0.2743$.

Exercice 4 Pour l'ordinateur *Tiobollo*, programmé pour vaincre Kaspanand au championnat du monde d'échecs, le temps de calcul pour évaluer 15 déplacements sur l'échiquier est modélisé par une variable aléatoire suivant une loi appartenant à la famille $\{\mathcal{L}(\lambda); \lambda > 0\}$, avec $\mathcal{L}(\lambda)$ déterminée par la densité

$$f_\lambda(z) = \frac{\lambda}{2z^{1/2}} \exp\left(-\lambda z^{1/2}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z).$$

On essaie d'identifier le paramètre λ à partir de la réalisation d'un n-échantillon $(Z_1, \ldots, Z_n)$, où chaque $Z_i \sim \mathcal{L}(\lambda)$. Pour $n = 100$ observations $(z_1, \ldots, z_n)$, on a par ailleurs trouvé

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = 188.8, \qquad \sum_{i=1}^{n} z_i^{1/2} = 94.96.$$

On admettra que si Z est une variable aléatoire de loi $\mathcal{L}(\lambda)$, alors $E_\lambda[Z] = \frac{2}{\lambda^2}$.

4.1 Traduire les hypothèses de l'énoncé en termes mathématiques, en précisant les ensembles Λ et $\mathbb{Z}$ (rappelons que $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable Z).

Réponse : il est clair que $\mathbb{Z} = \mathbb{R}_+$ et que $\Lambda = \mathbb{R}_+^*$.

4.2 Donner un estimateur fortement consistant de λ, que l'on notera $\hat{\lambda}_n^{(1)}$, par la méthode des moments, en justifiant vos réponses.

Réponse : d'après $E_\lambda[Z] = \frac{2}{\lambda^2}$*, on a :*

$$\lambda = \sqrt{\frac{2}{E_\lambda[Z]}} = f(E_\lambda[Z])$$

et donc $\hat{\lambda}_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\bar{Z}_n}}$ *est estimateur fortement consistant de* λ*.*

4.3 Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ, que l'on notera $\hat{\lambda}_n^{(2)}$. Comparer les valeurs numériques obtenues pour $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ et $\hat{\lambda}_n^{(2)}$.

Réponse : l'estimateur du maximum de vraisemblance est obtenu en minimisant la vraissemblance ou ce qui est plus facile la log-vraissemblance d'un n-échantillon $LV = \sum_{i=1}^n ln(f_\lambda(z_i))$*. Pour trouver* λ *minimisant cette quantité, on calcule la valeur annulant la dérivée*[1] *de* LV *par rapport à* λ *:*

$$\frac{dLV}{d\lambda}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_\lambda(z_i)} \frac{d}{d\lambda} f_\lambda(z_i)$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} f_\lambda(z) &= \frac{1}{2z^{1/2}} \exp(-\lambda z^{1/2}) + \frac{\lambda}{2z^{1/2}} \exp(-\lambda z^{1/2})(-z^{1/2}) \\ &= \frac{1}{2z^{1/2}} \exp(-\lambda z^{1/2})(1 - \lambda z^{1/2}) \\ &= f_\lambda(z) \left(\frac{1}{\lambda} - z^{1/2} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{dLV}{d\lambda}(\lambda) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda} - z_i^{1/2} \right) \\ &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n z_i^{1/2} \end{aligned}$$

En annulant cette dérivée ($\frac{dLV}{d\lambda}(\hat{\lambda}_n^{(2)}) = 0$*) il vient :*

$$\hat{\lambda}_n^{(2)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n Z_i^{1/2}}$$

A.N. pour la réalisation de notre n-échantillon, on obtient :

$$\hat{\lambda}_n^{(1)} = \sqrt{\frac{200}{188.8}} \simeq 1.03, \;\; \textit{et } \hat{\lambda}_n^{(2)} = \frac{100}{94.96} \simeq 1.05$$

[1] N.B. : il resterait ensuite à montrer que c'est bien un minimum ce que l'on admet.